CƠ HỌC LÝ THUYẾT

(Tóm tắt lý thuyết & Bài tập mẫu)

Trịnh Anh Ngọc

15/10/2009

Lời khuyên

We are what we repeatedly do. Excellence, then, is not an act, but a habit.
Aristotle

Không ai hy vọng học bơi mà không bị ướt. Cũng không có ai hy vọng học bơi mà chỉ nhờ đọc sách hay nhìn người khác bơi. Bơi lội không thể học mà không có thực hành. Chỉ có một cách học là tự "ném" mình xuống nước và tập luyện hàng tuần, thậm chí hàng tháng, cho đến khi bài tập luyện trở thành phản xạ nhẹ nhàng. Tương tự như vậy, cơ học không thể được học một cách thụ động. Không giải quyết nhiều bài toán có tính thách thức, người sinh viên không có cách nào khác để kiểm tra năng lực hiểu biết của mình về môn học. Đây là nơi sinh viên gặt hái được sự tự tin, cảm giác thỏa mãn và lôi cuốn nảy sinh nhờ sự hiểu biết xác thực về các nguyên lý ẩn tàng. Khả năng giải các bài toán là chứng minh tốt nhất sự nắm vững môn học. Như trong bơi lội, bạn giải càng nhiều bài toán, bạn càng sắc xảo, nắm bắt nhanh các kỹ năng giải toán. Để thu lợi đầy đủ từ các thí dụ và bài tập được giải trong tài liệu này (cũng như sách bài tập mà bạn có), tránh tham khảo ngay lời giải quá sớm. Nếu bạn không thể giải bài toán sau những nổ lực ban đầu, hãy thử cố gắng lần nữa! Nếu bạn tìm đọc lời giải chỉ sau nhiều lần nổ lực, nó sẽ được giữ lại trong trí bạn một thời gian dài. Còn nếu bạn tìm ra được lời giải của riêng mình cho bài toán, thì nên so sánh nó với lời giải trong sách. Bạn có thể tìm thấy ở đó lời giải gọn hơn, cách tiếp cận thông minh hơn.

Tài liệu ôn tập này không thể thay thế cho sách lý thuyết và sách bài tập về cơ học. Nó chỉ có tác dụng giúp bạn ôn tập có chủ điểm về một số vấn đề quan trọng trong chương trình môn cơ học lý thuyết. Một điều quan trọng: vì một cuốn sách bài tập nói chung thường chứa đựng nhiều, rất nhiều các thí dụ và bài tập, bạn tuyệt đối nên tránh cố gắng nhớ nhiều kỹ thuật và lời giải của nó; thay vì thế, bạn nên tập trung vào sự hiểu biết các khái niệm và những nền tảng mà nó hàm chứa. Hãy bắt đầu HỌC và TẬP.

Chúc bạn thành công.

Mục lục

Chương 1

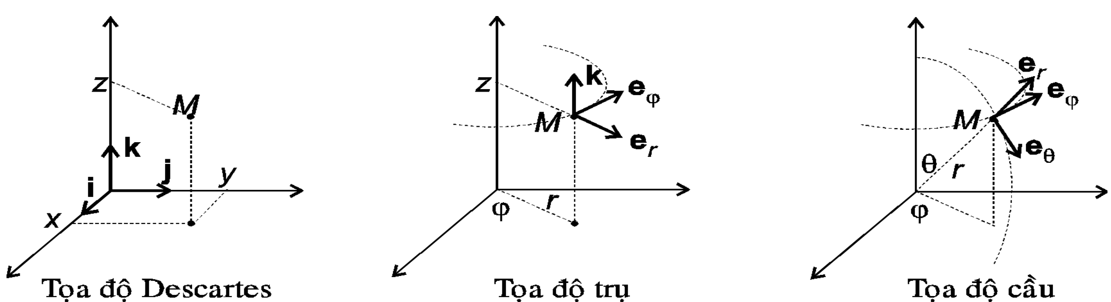
ĐỘNG HỌC

Để *hiểu* và *biết* cách giải các bài toán cơ học sinh viên nhất thiết phải nắm vững *lý thuyết* về cơ học. Phần lý thuyết dưới đây chỉ là tóm lược các điểm chính, sinh viên nên học lại phần lý thuyết tương ứng trong các sách lý thuyết.

1 Phương pháp mô tả chuyển động

Kiến thức cần biết: (1) đại số vectơ và (2) giải tích vectơ (xem Ch. 0, [1]). Làm các bài tập từ 1 đến 8.

1.1 Hệ tọa độ



Hình 1: Vectơ cơ sở địa phương

+ Hệ tọa độ Descartes:

$$M(x,y,z) \Leftrightarrow \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.1}$$
$$\Rightarrow d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \tag{1.2}$$

+ Hệ tọa độ trụ:

$$M(r,\varphi,z) \Leftrightarrow \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \tag{1.3}$$
$$\Rightarrow d\mathbf{r} = (dr)\mathbf{e}_r + (rd\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (dz)\mathbf{e}_z \tag{1.4}$$

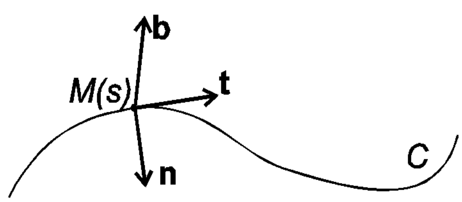
trong đó $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ là các vectơ cơ sở địa phương của tọa độ trụ tại M.

+ Hệ tọa độ cầu:

$$M(r,\varphi,\theta) \Leftrightarrow \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \tag{1.5}$$
$$\Rightarrow d\mathbf{r} = (dr)\mathbf{e}_r + (rd\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (rd\theta)\mathbf{e}_\theta \tag{1.6}$$

trong đó $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ là các vectơ cơ sở địa phương của tọa độ cầu tại M.

Hệ tọa độ	Quan hệ với tọa độ Descartes	Vectơ cơ sở địa phương
Trụ (r,φ,z)	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = z$	$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}$ $\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}$ $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$
Cầu (r,φ,θ)	$x = r\sin\theta\cos\varphi$ $y = r\sin\theta\sin\varphi$ $z = r\cos\theta$	$\mathbf{e}_r = \sin\theta(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) + \cos\theta\mathbf{k}$ $\mathbf{e}_\varphi = \sin\theta(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j})$ $\mathbf{e}_\theta = \cos\theta(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) - \sin\theta\mathbf{k}$



Hình 2: Vectơ cơ sở địa phương của tọa độ tự nhiên.

Trên đường cong C, chọn điểm M_0 và một chiều dương trên C. *Hoành độ cong* của điểm M trên C là số đại số s có trị tuyệt đối bằng chiều dài cung $\overset{\frown}{M_0M}$ và lấy dấu cộng nếu chiều từ M_0 đến M là chiều dương, dấu trừ nếu ngược lại.

Hình 2 thể hiện các vectơ cơ sở địa phương của hệ tọa độ tự nhiên (hoành độ cong s) của đường cong có phương trình tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$.

Vectơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{1.7}$$

Vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ được xác định sao cho

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \tag{1.8}$$

trong đó $k = 1/\rho$ là *độ cong*, ρ là *bán kính cong* (của đường cong) tại M. Chú ý, *vectơ pháp tuyến đơn vị* $\mathbf{n}$ *luôn hướng về bề lõm của đường cong* C.

Vectơ lưỡng pháp tuyến đơn vị:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \tag{1.9}$$

\+ Tọa độ tự nhiên:

$$M(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \tag{1.10}$$

$$\Rightarrow \quad d\mathbf{r} = (ds)\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (ds)\mathbf{t} \tag{1.11}$$

1.2 Luật chuyển động - Vận tốc - Gia tốc

Phương pháp	Luật chuyển động	Vận tốc	Gia tốc
Vectơ	$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$	$\dot{\mathbf{r}}$	$\ddot{\mathbf{r}}$
Descartes $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$	$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$
Trụ $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}\}$	$\begin{cases} r = f(t) \\ \varphi = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$	$(\dot{r}, r\dot{\varphi}, \dot{z})$	$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}, \ddot{z})$
Cực $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$	$\begin{cases} r = f(t) \\ \varphi = g(t) \end{cases}$	$(\dot{r}, r\dot{\varphi})$	$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$
Tự nhiên $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$	$s = f(t)$	$(v, 0)$, $v = \dot{s}$	$\left(\dot{v}, \dfrac{v^2}{\rho}\right)$

Tốc độ $v = |\mathbf{v}|$.

Trong tọa độ tự nhiên, tốc độ $v = \dot{s}$, gia tốc tiếp $w_t = \dot{v}$, gia tốc pháp $w_n = v^2/\rho$.

Công thức tính bán kính cong (ký hiệu $w = |\mathbf{w}|$):

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_t^2}}. \tag{1.12}$$

Tích vô hướng $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ của vận tốc và gia tốc thể hiện sự nhanh chậm của chuyển động

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v\dot{v} \begin{cases} > 0 & \text{nhanh dần} \\ < 0 & \text{chậm dần} \\ = 0 & \text{đều} \end{cases} \tag{1.13}$$

1.3 Vài chuyển động quan trọng

$\star$ *Chuyển động tròn.* Điểm chuyển động tròn trong Oxy quanh O. Ký hiệu: $\mathbf{r}$ - vectơ định vị điểm, φ - góc quay, $\omega = \dot{\varphi}$ - vận tốc góc, $\vec{\omega} = \omega\mathbf{k}$ - vectơ vận tốc góc. Vận tốc của điểm

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{1.14}$$

Gia tốc của điểm

$$\mathbf{w} = \underbrace{\vec{\epsilon} \times \mathbf{r}}_{\mathbf{w}_t} \underbrace{-\omega^2 \mathbf{r}}_{\mathbf{w}_n}, \tag{1.15}$$

trong đó $\vec{\epsilon} = d\vec{\omega}/dt$ ($\epsilon = d\omega/dt$) là vectơ gia tốc góc.

Nếu chuyển động đều thì $v = \omega R$ ($\omega = const$) và gia tốc hướng tâm $w = \omega^2 R$ (R - bán kính của quỹ đạo).

$\star$ *Chuyển động có gia tốc xuyên tâm*

gia tốc xuyên tâm $\Leftrightarrow$ $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ (const)$\Rightarrow$ Quỹ đạo phẳng

$\Leftrightarrow$ vận tốc diện tích $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{c}$ (const).

Công thức Binet:

$$\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=-F. \tag{1.16}$$

◦ Phân loại bài toán động học điểm

Bài toán thứ nhất: Tìm phương trình chuyển động (luật chuyển động), phương trình quỹ đạo, vận tốc, gia tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp, bán kính cong của quỹ đạo.

Bài toán thứ hai: Khảo sát chuyển động nhanh dần đều, chậm dần đều và đều.

2 Chuyển động của cố thể

Cố thể là cơ hệ mà khoảng cách giữa các điểm của nó không thay đổi trong quá trình chuyển động. Vị trí của cố thể được xác định bởi ba điểm không thẳng hàng của nó.

2.1 Trường vận tốc của cố thể

Định lý 1. *Trường vận tốc của một cố thể (S) là trường đẳng chiếu*

$$\mathbf{v}(M)\cdot\overrightarrow{MN}=\mathbf{v}(N)\cdot\overrightarrow{MN}\quad\forall M,N\in(S). \tag{1.17}$$

⋆ *Chuyển động tịnh tiến*

Cố thể (S) chuyển động tịnh tiến khi vectơ nối hai điểm bất kỳ của nó luôn luôn cùng phương với chính nó.

Trường vận tốc, gia tốc trong chuyển động tịnh tiến là *trường đều*. Chuyển động của (S) dẫn về chuyển động của một điểm thuộc (S).

⋆ *Chuyển động quay quanh một trục cố định*

Cố thể (S) chuyển động quay quanh trục cố định khi nó có hai điểm cố định. Trục quay là đường thẳng đi qua hai điểm cố định này. Các điểm nằm ngoài trục quay chuyển động tròn với tâm nằm trên trục quay.

Gọi $\mathbf{k}$ là vectơ đơn vị của trục quay (Oz), φ là góc quay.

Phương trình chuyển động: $\varphi = \varphi(t)$.

Trường vận tốc:

$$\mathbf{v}(M) = \vec{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{1.18}$$

trong đó $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$ là vectơ vận tốc góc.

Trường gia tốc:

$$\mathbf{w}(M) = \vec{\epsilon} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}), \tag{1.19}$$

trong đó $\vec{\epsilon} = \ddot{\varphi}\mathbf{k}$ là vectơ gia tốc góc. Gia tốc tiếp $\mathbf{w}_t = \vec{\epsilon} \times \mathbf{r}$, gia tốc pháp $\mathbf{w}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})$.

⋆ *Chuyển động tổng quát.* Chuyển dịch bất kỳ của cố thể từ vị trí này sang vị trí khác, trong khoảng thời gian vô cùng bé (chuyển động tức thời), có thể được thực hiện nhờ chuyển động tịnh tiến, tương ứng với chuyển dịch của một điểm, và chuyển động quay quanh trục đi qua điểm ấy.

Trường vận tốc của cố thể trong chuyển động tổng quát (công thức Euler):

$$\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(C) + \omega(t) \times \overrightarrow{CM}\ . \tag{1.20}$$

⋆ *Chuyển động song phẳng*

Cố thể (S) chuyển động song phẳng khi có ba điểm không thẳng hàng luôn luôn chuyển động trong mặt phẳng (π) cố định. Khi khảo sát chuyển động song phẳng ta chỉ cần xét chuyển động của một tiết diện của nó (phần giao của cố thể với (π)). Chuyển động tức thời của cố thể gồm: chuyển động chuyển động quay quanh một trục vuông góc với (π), và chuyển động tịnh tiến xác định bởi chuyển động của giao điểm trục quay tức thời với mặt phẳng (π) gọi là *tâm vận tốc tức thời.*

∘ **Phân loại bài toán động học cố thể**

Bài toán thứ nhất: Khảo sát chuyển động quay của cố thể quanh trục cố định. Vấn đề: tìm φ, ω, ϵ của cố thể; vận tốc, gia tốc của một điểm nào đó trên cố thể.

Bài toán thứ hai: Bài toán chuyền động.

Bài toán thứ ba: Kết hợp với chuyển động quay với chuyển động tịnh tiến.

2.2 Hợp chuyển động

- Hệ quy chiếu cố định $(T) = Oxyz$, chuyển động của M đối với (T) gọi là chuyển động tuyệt đối. $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{w}_a$ - vận tốc, gia tốc của M đối với (T), gọi là vận tốc, gia tốc tuyệt đối của M.

- Hệ quy chiếu động $(T_1) = O_1x_1y_1z_1$ ((T_1) chuyển động đối với (T)), chuyển động của M đối với (T_1) gọi là chuyển động tương đối. $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{w}_r$ - vận tốc, gia tốc của M đối với (T_1), gọi là vận tốc, gia tốc tương đối của M.

- Chuyển động của (T_1) đối với (T) gọi là chuyển động theo. Chuyển động của điểm P, gắn với (T_1) trùng với M tại thời điểm đang xét, đối với (T) gọi là chuyển động theo của M. $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{w}_e$ - vận tốc, gia tốc của P đối với (T), gọi là vận tốc, gia tốc theo của M.

⋆ *Công thức cộng vận tốc*:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e. \tag{1.21}$$

⋆ *Công thức cộng gia tốc*:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c, \tag{1.22}$$

trong đó

$$\mathbf{w}_c = 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r \tag{1.23}$$

là gia tốc Coriolis sinh ra do chuyển động quay của (T_1) đối với (T).

◦ Phân loại bài toán hợp chuyển động

Bài toán thứ nhất: Bài toán tổng hợp chuyển động.

Bài toán thứ hai: Bài toán phân tích chuyển động.

⋆ *Chuyển động song phẳng* là chuyển động trong đó cố thể có ba điểm không thẳng hàng thuộc cố thể luôn luôn chuyển động trong một mặt phẳng cố định. Chuyển động song phẳng được xét bằng cách khảo sát chuyển động của hình phẳng S thuộc cố thể nằm trong mặt phẳng cố định. Giao điểm của trục quay tức thời của cố thể với mặt phẳng cố định gọi là tâm quay hay tâm vận tốc tức thời.

◦ Phân loại bài toán chuyển động song phẳng

Tính vận tốc góc của hình phẳng, tính vận tốc của một điểm bất kỳ trên hình phẳng.

Tính gia tốc góc của hình phẳng, tính gia tốc của một điểm bất kỳ trên hình phẳng.

Thí dụ về chuyển động song phẳng sinh viên đọc kỹ lời giải các bài tập 3.2, 3.3, [1].

Chương 2

ĐỘNG LỰC HỌC

1 Các định luật Newton

Nội dung các định luật, xem Mục 1.2, [1].

1.1 Lực

Quan hệ giữa lực và chuyển động là nội dung của định luật thứ hai

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w}. \tag{2.1}$$

⋆ *Lực hấp dẫn.* Hai vật khối lượng m_1, m_2 hút nhau bởi lực có phương là đường nối khối tâm của chúng và độ lớn bằng

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}, \tag{2.2}$$

trong đó d là khoảng cách hai khối tâm và $G \approx 6,67 \times 10^{-11} m^3/s^2kg$ là hằng số hấp dẫn.

Trọng lượng của một vật là môđun của lực hút do trái đất tác dụng lên vật.

⋆ *Lực ma sát.* Lực ma sát nằm trong mặt phẳng tiếp xúc giữa các vật, ngược hướng với chiều chuyển động của vật hay chiều của lực tác dụng vào vật. Về độ lớn lực ma sát tỉ lệ với phản lực pháp tuyến

$$F_{ms} = \eta R_n, \tag{2.3}$$

trong đó η là hệ số ma sát.

⋆ *Lực cản của môi trường.* Vật chuyển động trong môi trường như không khí, nước,...luôn luôn chịu một sức cản có hướng ngược với hướng chuyển động và có độ lớn tỉ lệ với lũy thừa của vận tốc

$$F = \mu v^{\alpha}. \tag{2.4}$$

Hệ số tỉ lệ μ phụ thuộc bản chất của môi trường, kích thước và hình dáng của vật; α là hằng số phụ thuộc vào chuyển động. Trong các chuyển động với vận tốc lớn nhưng không vượt quá vận tốc âm, thực nghiệm cho thấy, lực cản của môi trường tỉ lệ với bình phương của vận tốc ($\alpha = 2$).

Nếu vật rơi tự do trong không khí thì lực cản F sẽ tăng dần từ 0 cùng với sự gia tăng vận tốc. Cuối cùng thì F cũng sẽ bằng trọng lực mg của vật. Sau đó vận tốc của vật sẽ không tăng lên nữa do không có gia tốc. Vận tốc không đổi này, gọi là vận tốc giới hạn (xác định từ phương trình $F = mg$).

⋆ *Lực đàn hồi.* Khi lò xo bị kéo dãn $\Delta x = x - x_0$ nó sẽ tác dụng lên vật gây ra lực kéo một lực $F_{\text{đh}}$ tỉ lệ với độ giãn Δx, ngược với hướng lực kéo

$$F_{\text{đh}} = -k\Delta x. \tag{2.5}$$

Hệ số tỉ lệ k gọi là độ cứng của lò xo.

1.2 Hai bài toán cơ bản của động lực học

Các bước cần thực hiện khi phân tích một bài toán cơ học:

+ Chọn hệ quy chiếu và hệ tọa độ gắn với hệ quy chiếu ấy.

+ Chọn đối tượng khảo sát (một hay nhiều vật).

+ Phân tích các lực tác dụng lên đối tượng khảo sát (vẽ sơ đồ lực).

+ Áp dụng các định luật Newton thiết lập phương trình hay hệ phương trình xác định các đại lượng cần tìm.

Các bài toán động lực học thuộc về một trong hai dạng:

Bài toán thuận. Cho chuyển động của chất điểm tìm lực tác dụng lên chất điểm.

Bài toán ngược. Cho lực tác dụng lên chất điểm tìm chuyển động của điểm.

1.3 Các định lý tổng quát của động lực học

Nội dung các định lý, xem Mục 1.5, 2.1, 2.2 và 2.3, [1]. Lưu ý một số khái niệm và công thức cần thiết dưới đây.

⋆ *Khối tâm* của một hệ là điểm hình học C xác định bởi

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \sum m_k \mathbf{r}_k, \tag{2.6}$$

trong đó $\mathbf{r}_k$ là vectơ định vị chất điểm thứ k, $M = \sum m_k$ là khối lượng của toàn hệ.

⋆ *Động lượng của hệ*

$$\mathbf{P} = \sum m_k \mathbf{v}_k = M \mathbf{v}_C.$$

Định lý 2 (Định lý động lượng của hệ)**.**

$$\dot{P} = \sum \mathbf{F}_k^{(e)}. \tag{2.7}$$

Định lý 3 (Định lý chuyển động khối tâm)**.**

$$M \ddot{\mathbf{r}}_C = \sum \mathbf{F}_k^{(e)}. \tag{2.8}$$

⋆ *Mômen quán tính* của hệ đối với điểm O:

$$J_O = \sum m_k r_k^2, \tag{2.9}$$

trong đó r_k là khoảng cách từ chất điểm thứ k đến O.

⋆ *Mômen quán tính* của hệ đối với trục Δ:

$$J_\Delta = \sum m_k d_k^2, \tag{2.10}$$

trong đó d_k là khoảng cách từ chất điểm thứ k đến Δ.

$\star$ *Tenxơ quán tính* là ma trận

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

trong đó J_x, J_y, J_z là mômen quán tính của hệ đối với các trục Ox, Oy, Oz; $J_{xy}, J_{xz}, \ldots$ là các mômen quán tính ly tâm của hệ

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum m_k x_k y_k, J_{yz} = J_{zx} = \sum m_k y_k z_k, J_{zx} = J_{xz} = \sum m_k z_k x_k \tag{2.12}$$

Nếu $\mathbf{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]^T$ là vectơ đơn vị của trục Δ thì $J_\Delta = \mathbf{n}^T\mathbf{J}\mathbf{n}$.

Định lý 4 (Định lý Huygens)**.**

$$J_\Delta = J_C + Md^2, \tag{2.13}$$

trong đó d là khoảng cách giữa hai trục.

$\star$ *Công thức tính mômen quán tính cần nhớ*

1. Thanh mảnh đồng chất chiều dài l, khối lượng M đối với trục qua khối tâm và vuông góc với thanh

$$J_C = \frac{1}{12}Ml^2. \tag{2.14}$$

2. Vòng đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục qua tâm và vuông góc với mặt phẳng chứa vòng

$$J_C = MR^2. \tag{2.15}$$

3. Đĩa tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục qua tâm và vuông góc với đĩa

$$J_C = \frac{1}{2}MR^2. \tag{2.16}$$

4. Hình trụ tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục hình trụ[1]

$$J_C = MR^2. \tag{2.17}$$

⋆ *Mômen động lượng của hệ*

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{r}_C \times M\mathbf{v}_C + \sum \mathbf{r}'_k \times m_k \mathbf{v}'_k. \tag{2.18}$$

Đặc biệt, trong chuyển động quay $\vec{\omega}$,

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\vec{\omega}. \tag{2.19}$$

Chiếu xuống trục quay Δ

$$L_\Delta = J_\Delta \omega. \tag{2.20}$$

Định lý 5 (Định lý mômen động lượng của hệ)**.**

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \tag{2.21}$$

⋆ *Động năng*

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum m_k v_k'^2.$$

Trường hợp đặc biệt:

(1) Chuyển động tịnh tiến

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2. \tag{2.22}$$

(2) Chuyển động quay quanh trục Δ

$$T = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2. \tag{2.23}$$

---

[1]Đây là công thức tính mômen quán tính cho ống trụ. Trường hợp khối trụ (đặc) $J_C = \frac{1}{2}MR^2$.

⋆ *Công*

Công phân tố của lực $\mathbf{F}$ làm chất điểm thực hiện chuyển dịch vô cùng bé $d\mathbf{r}$, ký hiệu δW,

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2.24}$$

Công (toàn phần) làm chất điểm chuyển dịch từ điểm A đến điểm B, ký hiệu W,

$$W = \int_{C(A,B)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{(tích phân đường loại 2)} \tag{2.25}$$

trong đó $C(A, B)$ là đường cong định hướng từ A đến B.

Lực $\mathbf{F}$ gọi là *lực bảo toàn* nếu tồn tại hàm $V(x, y, z)$ (chỉ phụ thuộc vị trí) sao cho

$$\mathbf{F} = -\bigtriangledown V. \tag{2.26}$$

Hàm V được gọi là *hàm thế* hay *thế năng*. Hàm $U = -V$ gọi là *hàm lực*.

⋆ *Vài công thức tính công của lực và hàm thế*

1. *Công của trọng lực* (trục z thẳng đứng hướng lên):

$$\delta W = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -mgdz. \tag{2.27}$$

   Công toàn phần (từ A đến B)

$$W = mg(z_A - z_B). \tag{2.28}$$

   Hàm thế của trọng lực: $V = mgz + C$.

2. *Công của lực đàn hồi* gây ra do lò xo độ cứng k có độ giãn x (lò xo nằm ngang theo phương x, gốc tọa độ được chọn ở vị trí cân bằng)

$$\delta W = -kxdx. \tag{2.29}$$

   Công toàn phần (từ A đến B)

$$W = \frac{k}{2}(x_A^2 - x_B^2). \tag{2.30}$$

   Hàm thế của lực đàn hồi: $V = \frac{k}{2}x^2$.

3. *Công của lực ma sát*

$$\delta W = -\eta R_n dx. \tag{2.31}$$

Công của lực ma sát luôn luôn âm (công cản). Lực ma sát không có thế.

4. *Công của lực trong chuyển động quay quanh trục*

$$\delta W = \omega M_\Delta(\mathbf{F})dt, \tag{2.32}$$

trong đó $M_\Delta(\mathbf{F})$ là chiếu của mômen lực $\mathbf{F}$ xuống trục Δ, còn gọi là mômen của lực đối với trục Δ.

Định lý 6 (Định lý động năng của hệ)**.**

$$dT = \sum \mathbf{F}_k^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}_k + \sum \mathbf{F}_k^{(i)} \cdot \delta \mathbf{r}_k. \tag{2.33}$$

◦ Phân loại bài toán áp dụng các định lý tổng quát

Bài toán thứ nhất: Dùng định lý bảo toàn động lượng và định lý bảo toàn mômen động lượng để tìm chuyển dịch của một vài bộ phân trong toàn hệ.

Bài toán thứ hai: Dùng định lý động lượng để xác định phản lực tại các liên kết.

Bài toán thứ ba: Dùng định lý mômen động lượng và định lý động năng để xác định các đặc trưng động học của chuyển động.

Chương 3

CƠ HỌC GIẢI TÍCH

1 Các khái niệm cơ bản

Cơ hệ gồm N chất điểm

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, M_N(x_N, y_N, z_N)$$

khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Vị trí của hệ được xác định nếu biết $3N$ tọa độ $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N$. Một vị trí của hệ được gọi là cấu hình của hệ. Giả sử hệ chịu r ràng buộc độc lập (hạn chế xét trường hợp hệ chỉ chịu liên kết hình học)

$$f_\alpha(x_k, y_k, z_k) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \tag{3.1}$$

- Nếu cấu hình của hệ được xác định bởi các giá trị của một bộ các biến độc lập $q_1, q_2, \ldots, q_d$, thì $\{q_1, q_2, \ldots, q_d\}$ được gọi là một tập các *tọa độ suy rộng* của hệ. Số tọa độ suy rộng gọi là *bậc tự do* của hệ. Trường hợp hệ chịu r liên kết hình học thì số tọa độ suy rộng $d = 3N - r$.

- Đạo hàm theo thời gian của các tọa độ suy rộng gọi là vận tốc suy rộng của hệ
$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d.$$

- Ở một cấu hình cho trước của hệ x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, giả sử các chất điểm thực hiện chuyển dịch $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ đến cấu hình $x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k, z_k + \Delta z_k$ thỏa ràng buộc (3.1), thì

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t + \sum_k \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_k}\Delta y_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_k}\Delta z_k\right) = 0. \tag{3.2}$$

Ta gọi các chuyển dịch $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ thỏa (3.2) là *chuyển dịch khả dĩ* (chuyển dịch xảy ra dưới tác dụng của lực cho trước - chuyển dịch thực - là một trong số các chuyển dịch khả dĩ).

- Hiệu của hai chuyển dịch khả dĩ bất kỳ gọi là *chuyển dịch ảo*, ký hiệu $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$, chúng thỏa điều kiện

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0. \tag{3.3}$$

2 Phương trình Lagrange

Các phương trình Lagrange được rút ra từ nguyên lý công ảo, còn gọi là nguyên lý chuyển dịch ảo.

2.1 Phương trình tổng quát động lực học

Định lý 7 (Nguyên lý công ảo). *Trong trường hợp liên kết đặt lên hệ là lý tưởng, tổng công phân tố của các lực chủ động và lực quán tính tác dụng lên cơ hệ trên chuyển dịch ảo bất kỳ bằng không tại mọi thời điểm*

$$\sum_k [(F_{xk} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{yk} - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{zk} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k] = 0. \tag{3.4}$$

Phương trình (3.4) gọi là phương trình tổng quát động lực học.

2.2 Phương trình Lagrange loại hai

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, 2, \ldots, d), \tag{3.5}$$

trong đó T là động năng của hệ, Q_s $(s = 1, 2, \ldots, d)$ là lực suy rộng.

Trong thực hành, lực suy rộng được rút ra từ hệ thức

$$\sum_s Q_s \delta q_s = \sum_k (F_{xk}\delta x_k + F_{yk}\delta y_k + F_{zk}\delta z_k) \tag{3.6}$$

(tổng công phân tố của lực chủ động tác dụng lên hệ).

2.3 Trường hợp hệ bảo toàn

Tất cả các lực chủ động đều có thế (hệ được gọi là hệ bảo toàn hay hệ động lực), nghĩa là tồn tại hàm $U = U(x_k, y_k, z_k)$ sao cho

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k},\ F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k},\ F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\Rightarrow Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \ldots, d).$$

Khi đó phương trình Lagrange có thể viết lại

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, d), \tag{3.7}$$

trong đó $L = T + U$ là hàm Lagrange. Ký hiệu $V = -U$ là thế năng của hệ thì $L = T - V$.

Trường hợp hệ bảo toàn đồng thời hàm lực và động năng không phụ thuộc hiển vào thời gian thì năng lượng toàn phần của hệ được bảo toàn

$$T + V = \text{const.} \tag{3.8}$$

Tọa độ cyclic là tọa độ suy rộng q_c không có mặt trong hàm Lagrange, nghĩa là

$$\frac{\partial L}{\partial q_c} = 0.$$

Khi đó ta có một tích phân đầu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \text{const.}$$

2.4 Thủ tục thiết lập phương trình Lagrange loại hai

1. Xác định bậc tự do và chọn các tọa độ suy rộng.

2. Tính động năng của hệ T, biểu diễn động năng theo các tọa độ và vận tốc suy rộng.

3. Tính tổng công phân tố của lực chủ động, biểu diễn nó theo các tọa độ suy rộng, từ đó suy ra các lực suy rộng dựa vào hệ thức (d).

4. Tính các đạo hàm $\partial T/\partial \dot{q}_s$, $d(\partial T/\partial \dot{q}_s)/dt$, $\partial T/\partial q_s$.

5. Thay vào phương trình Lagrange loại hai.

Bài tập

Động học

Bài tập ôn về vectơ

1. Trong hệ tọa độ Descartes, cho ba vectơ:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \ \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k},\ \ \mathbf{c} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

a) Tìm $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$ và $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$.

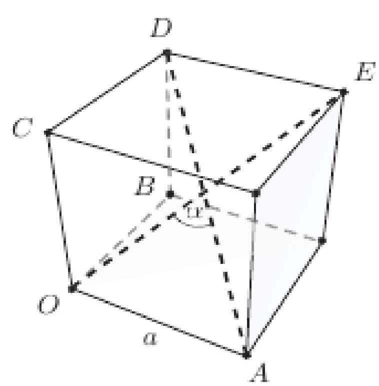
b) Tìm $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ và $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Suy ra góc giữa $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$.

c) Tìm thành phần của $\mathbf{c}$ theo hướng của $\mathbf{a}$ và theo hướng của $\mathbf{b}$.

d) Tìm $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ và $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

e) Tìm $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ và $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ và chỉ ra rằng chúng bằng nhau. Tập được sắp $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ là hệ vectơ thuận hay nghịch?

f) Kiểm đồng nhất thức (công thức Gibss): $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.



Hình 1: Bài tập 2

2. Tìm góc giữa hai đường chéo khối lập phương trên hình 1.

3. Cho $ABCD$ là hình bốn cạnh tổng quát (lệch) và cho P, Q, R, S là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA tương ứng. Chứng minh $PQRS$ là hình bình hành.

4. Trong hình tứ diện, vẽ các đường nối trung điểm của mỗi cạnh với trung điểm của cạnh đối diện. Chứng tỏ rằng ba đường này cắt nhau tại một điểm chia đôi chúng.

5. Cho tứ diện $ABCD$ và cho P, Q, R, S là trọng tâm của các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D tương ứng. Chứng tỏ rằng các đường AP, BQ, CR, DS đồng quy tại một điểm gọi là trọng tâm (centroid) của tứ diện, nó chia mỗi đường theo tỉ số 3 : 1.
H.D. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}:\overrightarrow{MB} = k$.

6. Chứng tỏ rằng ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm.
H.D. Chọn O là giao điểm của hai đường cao.

7. Chứng minh các đồng nhất thức:

a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d}$.

c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0$ (đồng nhất thức Jacobi).

8. Cho vectơ $\mathbf{v}$ là hàm của thời gian t và $\mathbf{k}$ là vectơ hằng. Tìm đạo hàm theo thời gian của: a) $|\mathbf{v}|^2$; b) $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{v}$; c) $[\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{k}]$.
Đ.S. a) $2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}$; b) $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{k})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\dot{\mathbf{v}}$; c) $[\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{v}}, \mathbf{k}]$.

9. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị, vectơ pháp tuyến đơn vị và độ cong của vòng tròn: $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = 0$ tại điểm có tham số θ.
ĐS. $\mathbf{t} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$, $\mathbf{n} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}$, $k = 1/a$.

10. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị, vectơ pháp tuyến đơn vị và độ cong của đường xoắn ốc: $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = b\theta$ tại điểm có tham số θ.
Đ.S. $\mathbf{t} = (-a\sin\theta\mathbf{i} + a\cos\theta\mathbf{j} + b\mathbf{k})/(a^2 + b^2)^{1/2}$, $\mathbf{n} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}$, $k = a/(a^2 + b^2)$.

11. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị, vectơ pháp tuyến đơn vị và độ cong của parabol $x = ap^2$, $y = 2ap$, $z = 0$ tại điểm có tham số p.
Đ.S. $\mathbf{t} = (p\mathbf{i} + \mathbf{j})/(p^2 + 1)^{1/2}$, $\mathbf{n} = (\mathbf{i} - p\mathbf{j})/(p^2 + 1)^{1/2}$, $k = 1/2a(p^2 + 1)^{3/2}$.

Bài tập về vận tốc, gia tốc và vận tốc góc

12. Một điểm P di chuyển dọc theo trục x chuyển dịch của nó tại thời điểm t được cho bởi $x = 6t^2 - t^3 + 1$, trong đó x đo bằng mét, t đo bằng giây. Tìm vận tốc, gia tốc của P tại thời điểm t. Tìm những thời điểm P dừng và vị trí của P tại những thời điểm đó.

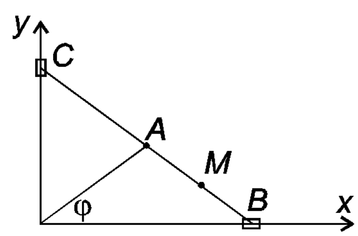
13. Một điểm P di chuyển dọc theo trục x với gia tốc tại thời điểm t được cho bởi $a = 6t - 4\ ms^{-2}$. Ban đầu P ở điểm $x = 20\ m$ và có vận tốc $15\ ms^{-1}$ về phía x âm. Tìm vận tốc và chuyển dịch của P tại thời điểm t. Tìm thời điểm P dừng và chuyển dịch của P tại thời điểm đó.

14. * Một hạt P chuyển động sao cho vectơ định vị của nó, r thỏa phương trình vi phân

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} \times \mathbf{r},$$

trong đó $\mathbf{c}$ là vectơ hằng. Chứng minh P chuyển động với tốc độ không đổi trên một đường tròn.

15. * Cho cơ cấu thước vẽ elip gồm thanh OA quay quanh O với góc $\varphi = \omega t$, thanh BC có hai đầu chuyển động trên hai trục x, y. Cho $OA = AB = AC = 2a$. Viết phương trình chuyển động, phương trình quỹ đạo của điểm M ($AM = MB$) (hình 2). Xác định vận tốc, gia tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp của điểm M tại thời điểm bất kỳ.



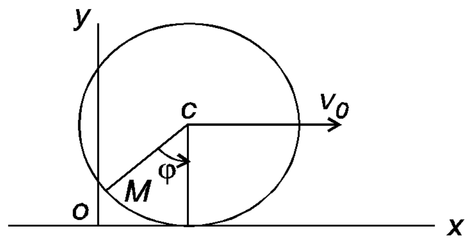
Hình 2: Bài tập 15

16. * Một bánh xe bán kính R chuyển động lăn không trượt trên đường thẳng với vận tốc ở tâm bằng v_0. Viết phương trình chuyển động của điểm M nằm trên vành bánh xe. Xác định vận tốc, gia tốc điểm M, bán kính cong ρ của quỹ đạo. Khảo sát sự nhanh chậm của chuyển động.

17. Điểm M chuyển động theo phương trình

$$x = at, \quad y = bt^2 \quad (a, b \text{ là hằng số}).$$

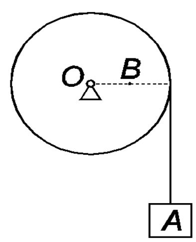
Xác định quỹ đạo, luật chuyển động của điểm trên quỹ đạo. Tính vận tốc, gia tốc của điểm và bán kính cong của quỹ đạo tại thời điểm $t = 0$.



Hình 3: Bài tập 16

18. Một bánh đà bán kính $R = 2\ m$ quay nhanh dần đều từ trạng thái đứng yên. Sau 10 s một điểm trên vành bánh xe có trị số vận tốc $v = 100\ m/s^2$. Xác định vận tốc và gia tốc của điểm trên vành bánh đà ở thời điểm $t = 15\ s$.

19. Một đầu sợi dây không giãn buộc vào vậtA, còn đầu kia quấn vào ròng rọc bán kính $R = 10\ cm$ quay quanh trục O cố định. Cho điểm A chuyển động đi xuống với phương trình $x = 100t^2$, $(x(cm), t(s))$. Xác định vận tốc góc và gia tốc góc của ròng rọc, đồng thời xác định gia tốc của điểm B trên ròng rọc ($OB = 5\ cm$).



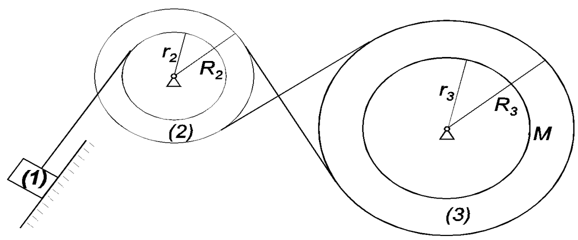
Hình 4: Bài tập 19

20. * Cho cơ cấu chuyển động như hình 5. Biết vật (1) chuyển động với phương trình $x = 70t^2 + 2$ $(x(cm), t(s))$, $R_2 = 50\ cm$, $r_2 = 30\ cm$, $R_3 = 60\ cm$, $r_3 = 40\ cm$. Xác định vận tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp và gia tốc toàn phần của điểm M khi vật (1) đi được một đoạn $s = 40\ cm$.

Chú thích. Bài toán chuyển động gồm các bánh xe quay quanh các trục và có liên hệ với nhau (ăn khớp bằng răng, tiếp xúc không trượt, nối với nhau bằng các đai chuyền). Tỉ số chuyển động giữa chúng

$$K_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}, \tag{3.9}$$

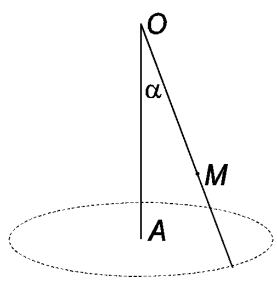
trong đó ω_i, R_i và z_i lần lượt là vận tốc góc, bán kính và số răng của bánh xe thứ i.



Hình 5: Bài tập 20

Bài tập về hợp chuyển động

21. * Một hình nón quay đều quanh trục OA với vận tốc góc ω. Điểm M chuyển động đều theo đường sinh của hình nón từ đỉnh đến đáy với vận tốc v_r; góc $\angle MOA = \alpha$. Tại thời điểm đầu $t = 0$, điểm M ở vị trí M_0 ($OM_0 = a$). Tính gia gốc của M tại thời điểm t.

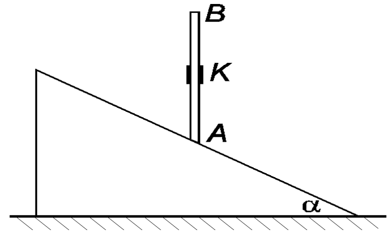


Hình 6: Bài tập 21

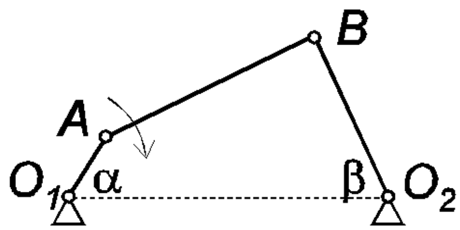
22. Tam giác ABC vuông tại A quay quanh cạnh AB thẳng đứng cố định với vận tốc góc ω =const. Một điểm M chuyển động trên cạnh BC theo phương trình $BM = s = 20t^2$. Xác định vận tốc, gia tốc của điểm M khi M nằm ở trung điểm BC. Biết $BC = 40\ cm$, $\alpha = 30^o$, $\omega = 2\ s^{-1}$.

23. * Cơ cấu cam có dạng hình nêm với $\alpha = 30^o$ chuyển động tịnh tiến trong mặt phẳng nằm ngang, với vận tốc không đổi $v_1 = 30\ cm/s$. Cam đẩy thanh AB chuyển động thẳng đứng trong rãnh cố định K (hình 7). Xác định vận tốc tuyệt đối của thanh AB và vận tốc tương đối của nó so với cam.

24. * Một cơ cấu bốn khâu gồm tay quay $O_1A = 10\ cm$ quay quanh O_1 với vận tốc góc $\omega_1 = 10\pi s^{-1}$, tay quay $O_2B = 30\ cm$ quay quanh O_2 và thanh AB chuyển động song phẳng. Cho $O_1O_2 = 50\ cm$. Xác định vận tốc góc thanh AB, vận tốc điểm B và vận tốc góc tay quay O_2B khi $\alpha = \beta = 60^o$.



Hình 7: Bài tập 23



Hình 8: Bài tập 24

Động lực học

Bài tập về bài toán thuận

25 (Bài tập 1.5, [1])**.** Một cầu vòm có bán kính cong tại đỉnh A bằng $R = 250\ m$.

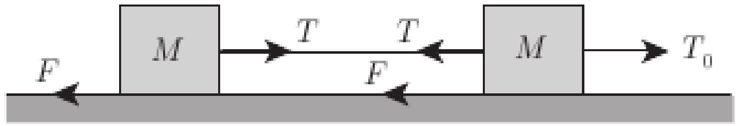
a) Hãy tìm áp lực của xe có khối lượng $m = 200\ kg$, đang chuyển động với vận tốc $v = 40\ km/h$, tác dụng lên cầu tại A.

b) Tính vận tốc tối đa của xe để nó vẫn còn bám vào mặt cầu. Lấy $9 = 9,81\ m/s^2$.

26 (Bài tập 1.6, [1])**.** Hai vật khối lượng $m_1 = 2\ kg$, $m_2 = 3\ kg$ nối với nhau bằng dây không giãn, không trọng lượng. Kéo vật m_2 bởi lực $10\ N$ theo phương thẳng đứng. Hãy tính gia tốc các vật và lực căng dây đặt lên m_1, m_2.

27. Hai vật giống nhau khối lượng mỗi khối là M, được nối với nhau bằng dây mảnh không giãn và có thể di chuyển trên mặt phẳng nhám nằm ngang (hình 9). Hai vật được kéo với tốc độ không đổi theo đường thẳng bằng sợi dây buộc vào một vật. Cho biết sức căng trong dây kéo là T_0, tìm sức căng trong dây nối. Nếu sức căng trong dây nối bất thình lình tăng tới $4T_0$, thì gia tốc tức thời của hai khối và sức căng tức thời trong dây nối bằng bao nhiêu?

Bài tập về phương trình vi phân chuyển động (bài toán ngược)



Hình 9: Bài tập 27

28 (Mục 1.3.2 Chuyển động thẳng, [1])**.** Xác định chuyển động thẳng của chất điểm dưới tác dụng của lực:

a) Phụ thuộc thời gian $F(t)$;

b) Phụ thuộc vị trí $F(x)$;

c) Phụ thuộc vận tốc $F(\dot{x})$.

29 (Mục 1.4.2 Dao động thẳng, [1])**.** Một vật khối lượng m treo vào đầu một lò xo có độ cứng k.

a) Xác định chuyển động của vật khi lò xo được kéo giãn một đoạn λ và buông ra không vận tốc đầu.

b) Với điều kiện đầu như câu a), tìm chuyển động của vật trong trường hợp vật chịu lực cản của môi trường có độ lớn tỉ lệ với vận tốc $\mu\dot{x}$. Chuyển động của vật sẽ như thế nào nếu vật còn chịu thêm lực kích động tuần hoàn $Q(t) = Q_0 \sin pt$.

30. Máy bay bổ nhào thẳng đứng đạt được vận tốc 1000 km/h, sau đó người lái đưa máy bay ra khỏi hướng bổ nhào và vạch thành một cung tròn bán kính $R = 600$ m trong mặt phẳng thẳng đứng. Trọng lượng người lái là 800 N. Hỏi người lái đã ép lên ghế ngồi một lực cực đại bằng bao nhiêu.

31. * Một quả cầu khối lượng m rơi thẳng đứng trong môi trường chất lỏng và chịu lực cản tỉ lệ với vận tốc, $F_C = kv$, k là hệ số cản, gia tốc trọng trường g. Xác định vận tốc, phương trình chuyển động của quả cầu. Giả thiết $v(0) = 0, y(0) = 0$.

32. * Một vật nặng P rơi tự do không vận tốc đầu. Sức cản của không khí lệ với bình phương vận tốc, $R = k^2Pv^2$ (k là hằng số). Xác định vận tốc vủa vật tại thời điểm t và vận tốc giới hạn của nó.

33. * Một viên đạn chuyển động trong mặt phẳng Oxy từ gốc O với vận tốc đầu V_0 lệch so với phương ngang góc α. Giả sử bỏ qua lực cản không khí.

a) Tìm vận tốc, quỹ đạo chuyển động của viên đạn.

b) Xác định α để viên đạn bắn trúng mục tiêu $M(v_0^2/2g, V_0^2/4g)$.

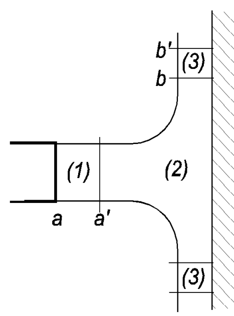
Bài tập về các định lý tổng quát

34. Chứng tỏ rằng, nếu một hệ di chuyển từ trạng thái nghỉ đến trạng thái khác trong khoảng thời gian nào đó, thì trung bình của lực ngoài toàn phần trong khoảng thời gian này phải bằng không. Áp dụng:

Một đồng hồ cát khối lượng m đặt trên mặt sàn cố định. Áp lực do đồng hồ lên mặt sàn là số đo trọng lượng biểu kiến của đồng hồ. Cát ở trạng thái nghỉ trong khoang trên, lúc $t = 0$, bắt đầu chảy xuống khoang dưới. Cát đến trạng thái nghỉ ở khoang dưới sau khoảng thời gian τ. Tìm trung bình theo thời gian trọng lượng biểu kiến của đồng hồ trong khoảng thời gian $[0, \tau]$.

Trọng lượng biểu kiến của đồng hồ không phải là hằng số! Hãy chứng minh, khi cát đang chảy, trọng lượng biểu kiến của đồng hồ lớn hơn trọng lượng thực (trọng lượng tĩnh).

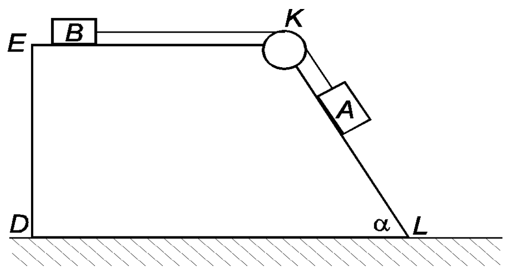
35. * Một tia nước chảy từ một vòi phun với vận tốc $v = 10\ m/s$ và trực giao với tường cứng. Đường kính vòi $d = 4\ cm$. Bỏ qua sự nén được của nước. Hãy xác định áp lực của tia nước lên tường. Coi các phần tử nước sau khi va chạm có vận tốc hướng dọc theo tường.



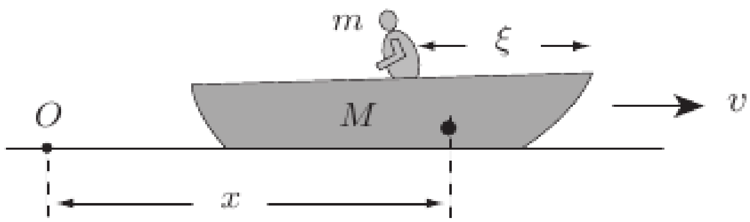
Hình 10: Bài tập 35

36. * Hai vật A và B có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 được nối với nhau bởi sợi dây không giãn không trọng lượng vòng qua ròng rọc. Vật A trượt trên mặt KL và vật B trượt trên mặt EK của lăng trụ $DEKL$ có khối lượng m_3 và nằm trên mặt nhẵn nằm ngang. Xác định dịch chuyển s của lăng trụ khi vật A trượt xuống một đoạn l. Biết ban đầu hệ đứng yên.

37. Một chiếc thuyền khối lượng M đứng yên trên mặt nước yên tĩnh và một người đàn ông khối lượng m ở mũi thuyền. Người này đứng dậy đi xuống đuôi thuyền rồi ngồi xuống. Nếu nước cản chuyển động với lực tỉ lệ với vận tốc của thuyền, chứng tỏ rằng thuyền sẽ đến và dừng ở vị trí ban đầu của nó. [Kết quả này độc lập với hằng số cản và chi tiết chuyển động của người.]

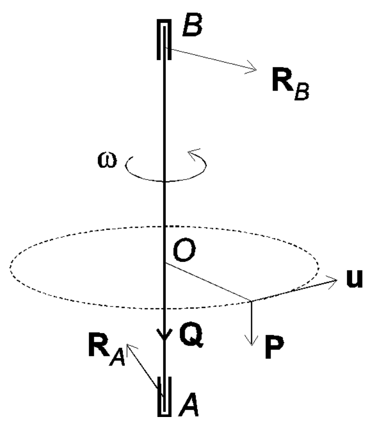


Hình 11: Bài tập 36



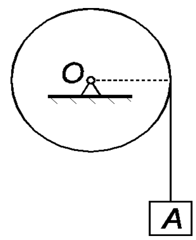
Hình 12: Bài tập 37

38. ⋆ Một tấm tròn đồng chất nặng Q bán kính r có thể quay không ma sát quanh trục thẳng đứng Oz trực giao với mặt phẳng đĩa. Một người trọng lượng P đi theo mép tấm tròn với vận tốc tương đối u không đổi. Ban đầu hệ đứng yên, hỏi tấm tròn quay quanh trục với vận tốc góc ω bằng bao nhiêu?



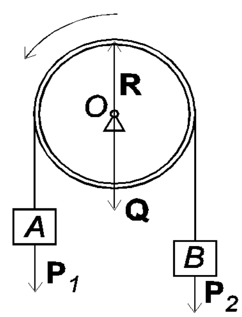
Hình 13: Bài tập 38

39. ⋆ Trục hình trụ trọng lượng P bán kính R quay được xung quanh trục nằm ngang nhờ quả cân A có trọng lượng Q treo vào sợi dây quấn quanh hình trụ (xem hình 14). Bỏ qua khối lượng của dây và ma sát ở ổ trục. Hãy xác định gia tốc góc trong chuyển động quay của hình trụ khi vật A có chuyển động thẳng đứng.



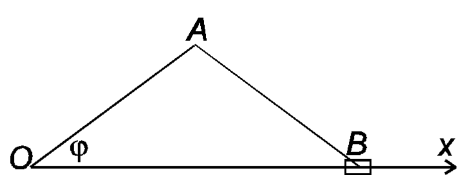
Hình 14: Bài tập 39

40. * Hai vật A và B nặng P_1 và P_2 được nối với nhau bằng sợi dây mềm không giãn không trọng lượng và vắt qua ròng rọc O bán kính r trọng lượng Q. Cho $P_1 > P_2$, khối lượng ròng rọc phân bố đều trên vành. Xác định gia tốc vật A.



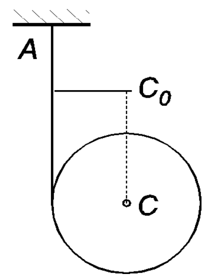
Hình 15: Bài tập 40

41. * Cho tay quay OA chiều dài r trong cơ cấu thanh truyền quay với vận tốc góc ω_0. Thanh truyền OB cũng có chiều dài r. Tay quay và thanh truyền là đồng chất và có khối lượng riêng là ρ (trên đơn vị dài). Tính động năng của cơ hệ.



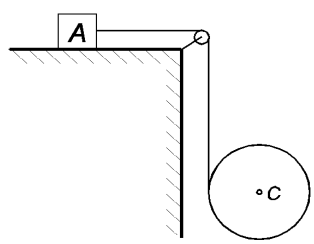
Hình 16: Bài tập 41

42. * Một dây không giãn, không trọng lượng được quấn vào đầu đĩa tròn đồng chất khối lượng m bán kính r, còn đầu kia buộc vào điểm cố định A. Khi dây lơi ra, hình trụ rơi xuống không vận tốc đầu. Xác định vận tốc v của tâm đĩa tròn khi nó rơi xuống một đoạn h. Xác định gia tốc tâm C và sức căng dây.



Hình 17: Bài tập 42

43. Một hình trụ trọng lượng P_1 có cuộn xung quanh bằng một sợi dây. Dây vắt qua ròng rọc cố định O rồi nối với vật A nặng P_2. Vật A trượt trên mặt phẳng nằm ngang có hệ số ma sát f. Bỏ qua ma sát ở ổ trục O, tìm gia tốc của vật A và của tâm C hình trụ.

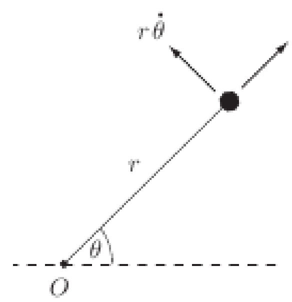


Hình 18: Bài tập 43

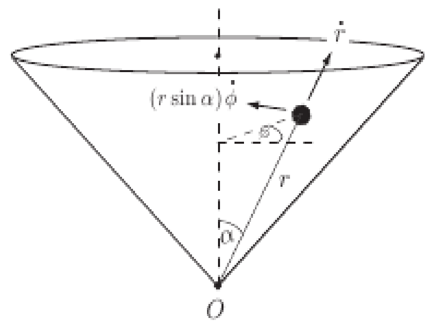
Cơ học giải tích

Bài tập về phương trình Lagrange

44. * Một hạt khối lượng m di chuyển dưới tác dụng của lực hấp dẫn do khối lượng M cố định đặt tại gốc. Lấy tọa độ cực r, θ làm tọa độ suy rộng, viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của hạt. Tìm một tích phân đầu và giải thích ý nghĩa cơ học của nó.



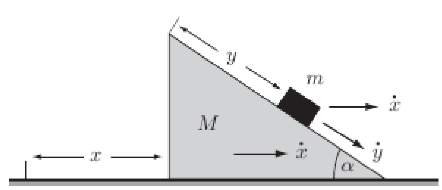
Hình 19: Bài tập 44



Hình 20: Bài tập 45

45. * Một hạt P khối lượng m trượt trên mặt trong trơn của hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh bằng 2α. Trục đối xứng của hình nón thẳng đứng qua đỉnh O hướng xuống. Chọn các tọa độ suy rộng: r, khoảng cách OP, và φ, góc phương vị đối với mặt phẳng cố định đi qua trục hình nón. Viết hệ phương trình Lagrange. Chứng tỏ rằng φ là tọa độ cyclic và tìm một tích phân đầu. Giải thích ý nghĩa cơ học của tích phân đầu này.

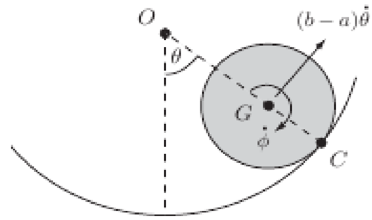
46. * Xét vật khối lượng m trượt trên một mặt bên trơn nghiêng góc α của nêm khối lượng M, nêm này lại trượt trên mặt phẳng trơn nằm ngang như hình 21. Toàn bộ chuyển động là phẳng. Viết phương trình Lagrange loại



Hình 21: Bài tập 46

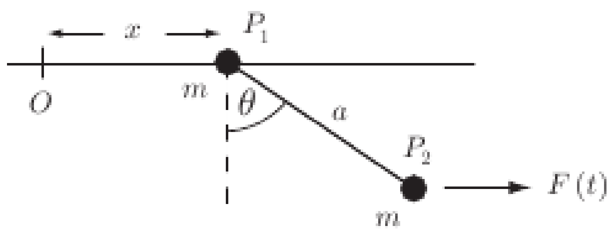
hai cho hệ này và suy ra (i) gia tốc của nêm, và (ii) gia tốc tương đối của vật (đối với nêm).

47. ⋆ Hình 22 vẽ một hình trụ tâm G bán kính a lăn không trượt trên mặt trong của một mặt trụ cố định tâm O bán kính $b > a$. Viết phương trình Lagrange loại hai, suy ra chu kỳ dao động bé của hình trụ quanh vị trí cân bằng.



Hình 22: Bài tập 47

48. ⋆ Cho hệ như hình 23. Đường ray trơn và lực cho trước $F(t)$ tác động

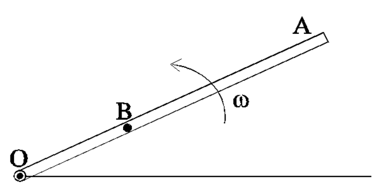


Hình 23: Bài tập 48

lên vật P_2. Bỏ qua trọng lực. Viết hệ phương trình Lagrange loại hai cho hệ.

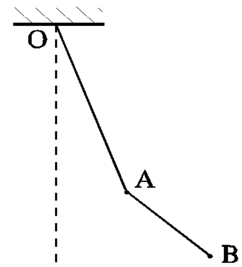
Trường hợp tính đến trọng lực thì sao?

49. Tìm quy luật chuyển động của viên bi B chuyển động dọc trong ống OA đang quay đều trong mặt phẳng nằm ngang với vận tốc góc ω. Tại thời điểm ban đầu viên bi cách O một đoạn bằng A và có vận tốc dọc theo ống bằng không.



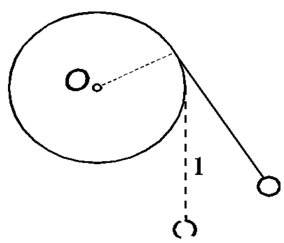
Hình 24: Bài tập 49

50. Viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của con lắc kép phẳng (xem hình 25). Giả sử khối lượng của A và B bằng nhau và bằng m.



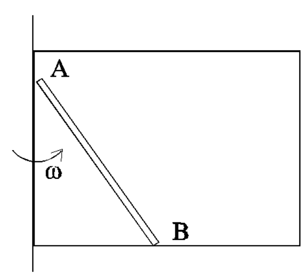
Hình 25: Bài tập 50

51. Viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của con lắc gồm chất điểm khối lượng m treo trên dây quấn vào hình trụ cố định bán kính r (xem hình 26). Độ dài của phần dây buông thõng tại vị trí cân bằng là l. Bỏ qua khối lượng của dây.



Hình 26: Bài tập 51

52. Các đầu mút của thanh đồng chất AB, có khối lượng m, dài $2a$ trượt không ma sát theo các thanh nằm ngang và thẳng đứng của một khung quay quanh thanh thẳng đứng (xem hình 27). Viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của thanh khi khung quay với vận tốc góc không đổi ω.



Hình 27: Bài tập 52

Lời giải một số bài tập

Trong Lời giải một số bài tập thỉnh thoảng chúng tôi có chua thêm giải thích, nhận xét, hoặc bình luận. Các nội dung này được đặt trong dấu ngoặc vuông và được in nghiêng để phân biệt.

$\boxed{\textbf{14}}$ Từ phương trình vi phân ta suy ra

$$\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{r} \Rightarrow \frac{dr^2}{dt} = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow r = R \text{ (const)} \tag{a}$$

$$\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{c} \Rightarrow \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c})}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = \text{const} \tag{b}$$

Từ đẳng thức (b) ta thấy hình chiếu của P lên trục đi qua O có vectơ chỉ phương $\mathbf{c}$ là điểm cố định, gọi là Q; hay nói cách khác, P luôn luôn nằm trên mặt phẳng cố định đi qua điểm Q và nhận $\mathbf{c}$ làm pháp vectơ. Cùng với đẳng thức (a) ta rút ra quỹ đạo của P là đường tròn.

Ký hiệu $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ là vận tốc và $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}}$ là gia tốc. Ta có [*bằng cách lấy đạo hàm hai vế phương trình vi phân*]

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Vậy P chuyển động với tốc độ không đổi.

$\boxed{\textbf{15}}$ [*Chú ý đến các mối liên hệ giữa điểm M (cần khảo sát) với các điểm mà giả thiết của bài toán cho biết chuyển động. Dùng tọa độ descartes.*]

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (2a\cos\omega t, 2a\sin\omega t), \\ \overrightarrow{OB} &= (2x_A, 0) = (4a\cos\omega t, 0). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (3a\cos\omega t, a\sin\omega t).$$

Phương trình chuyển động của M:

$$\begin{cases} x &= 3a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \end{cases}$$

Quỹ đạo (khử t từ phương trình chuyển động):

$$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Vận tốc:

$$\dot{x} = -3a\omega\sin\omega t, \quad \dot{y} = a\omega\cos\omega t.$$

Gia tốc:

$$\ddot{x} = -3a\omega^2\cos\omega t, \quad \ddot{y} = -a\omega^2\sin\omega t.$$

Để tính gia tốc tiếp ta cần tính tốc độ (môđun vectơ vận tốc)

$$v = a|\omega|\sqrt{1 + 8\sin^2\omega t}.$$

Gia tốc tiếp:

$$w_t = \dot{v} = \frac{4a|\omega|\omega\sin 2\omega t}{\sqrt{1 + 8\sin^2\omega t}}.$$

Để tính gia tốc pháp ta cần đến môđun vectơ gia tốc:

$$w = a\omega^2\sqrt{1 + 8\cos^2\omega t}.$$

Gia tốc pháp:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \frac{a\omega^2\sqrt{9 - 12\sin^2 2\omega t}}{\sqrt{1 + 8\sin^2\omega t}}.$$

Chú ý, gia tốc pháp luôn luôn là số dương!

16 Chuyển động của tâm C là chuyển động thẳng đều vận tốc v_0. Do bánh xe lăn không trượt nên $R\varphi = v_0 t$ (giả thiết lúc $t = 0$ điểm M nằm ở gốc tọa độ O).

Hệ thức liên hệ $\overrightarrow{OM}$ với $\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}\ .$$

Chiếu hệ thức vectơ xuống các trục tọa độ

$$\begin{cases} x &= x_C + R\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \\ y &= y_C + R\cos(\pi - \varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R} \\ y &= R - R\cos\frac{v_0 t}{R} \end{cases}$$

Vận tốc:

$$\dot{x} = v_0\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right), \quad \dot{y} = v_0 \sin\frac{v_0 t}{R} \Rightarrow v = v_0\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)}.$$

Gia tốc:

$$\ddot{x} = \frac{v_0^2}{R}\sin\frac{v_0 t}{R}, \quad \ddot{y} = \frac{v_0^2}{R}\cos\frac{v_0 t}{R} \Rightarrow w = \frac{v_0^2}{R}.$$

Để tính bán kính cong ta cần biết gia tốc tiếp,

$$w_t = \dot{v} = \frac{v_0^2}{R}\frac{\sin\frac{v_0 t}{R}}{\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)}},$$

gia tốc pháp

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \frac{v_0^2}{2R}\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)}.$$

Suy ra

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = 2R\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)} = 4R\left|\sin\frac{v_0 t}{2R}\right|.$$

$\boxed{\mathbf{20}}$ Vận tốc của (1): $\dot{x} = 140t\ (cm/s)$.

Do đai chuyền, bánh xe (2) chuyển động quay với vận tốc góc ω_2 thỏa $\omega_2 r_2 = 140t$ suy ra $\omega_2 = 14t/3\ (s^{-1})$ [*vận tốc của điểm trên vành bánh xe (2) bằng vận tốc của vật (1)*].

Bánh xe (3) chuyển động quay với vận tốc góc ω_3 thỏa $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$ suy ra $\omega_3 = R_2\omega_2/R_3 = 35t/9\ (s^{-1})$ [*bánh xe (3) và bánh xe (2) nối với nhau bằng đai chuyền. Dùng công thức chuyền động*].

Điểm M gắn với bánh xe (3) chuyển động quay quanh trục. Vận tốc của M là $v = \omega_3 r_3 = 1400t/9\ (cm/s)$. Gia tốc góc của bánh xe (3) là $\epsilon_3 = 35/9\ (1/s^2)$ nên gia tốc tiếp của M là $w_t = \epsilon_3 r_3 = 1400/9\ (cm/s^2)$ và gia tốc pháp của M là $w_n = \omega_3^2 r_3 = 19000t^2/81\ (cm/s^2)$ [*xem lại các công thức liên quan đến chuyển động của cố thể quanh một trục*].

Thời điểm (1) đi được $s = 40\ (cm)$ là $t = 2/\sqrt{7}$, thay vào các biểu thức trên ta được kết quả cần tìm.

[*Chú ý, kết quả tính vận tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp của điểm M chỉ là độ lớn. Để xác định hướng của các vectơ này ta cần xét thêm chiều quay của các bánh xe liên kết với nhau!*]

$\boxed{\mathbf{21}}$ Chuyển động tương đối của M đối với hình nón (hệ tọa độ động) là chuyển động thẳng đều nên gia tốc tương đối w_r bằng không.

Chuyển động theo là chuyển động tròn với vận tốc góc ω không đổi nên vận tốc theo của M là $\mathbf{v}_e = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$, trong đó $\vec{\omega} = \omega\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$. Gia tốc theo (dùng công thức Gibbs):

$$\mathbf{w}_e = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = (\vec{\omega}\cdot\mathbf{r})\vec{\omega} - \omega^2\mathbf{r}.$$

Để ý rằng $\vec{\omega}\cdot\mathbf{r} = -\omega r\cos\alpha$ nên

$$\mathbf{w}_e = -\omega^2 r\cos\alpha\mathbf{k} - \omega^2 r\mathbf{r}_0,$$

trong đó $\mathbf{r}_0$ là vectơ đơn vị của $\mathbf{r}$. Nếu phân tích vectơ $\mathbf{r}_0$ thành

$$\mathbf{r}_0 = -\cos\alpha\mathbf{k} + \sin\alpha\mathbf{u}$$

với **u** là vectơ đơn vị trực giao với **k** (trục z) và nằm trong mặt phẳng (AOM), thì

$$\mathbf{w}_e = -\omega^2 r \sin\alpha \mathbf{u}.$$

Gia tốc Coriolis của M:

$$\mathbf{w}_c = 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2\omega v_r \sin\alpha \mathbf{v},$$

trong đó **v** là vectơ đơn vị của vectơ $\mathbf{k} \times \mathbf{v}_r$, vectơ này vuông góc với mặt phẳng (AOM).

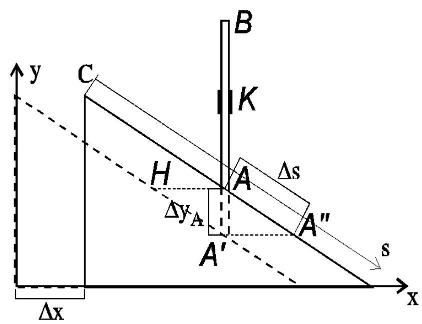
Áp dụng công thức cộng gia tốc,

$$\mathbf{w}_a = -\omega^2 r \sin\alpha \mathbf{u} + 2\omega v_r \sin\alpha \mathbf{v},$$

gia tốc này nằm trong mặt phẳng vuông góc với OA. Tại thời điểm t, $r = v_r t + a$,

$$\mathbf{w}_a = -\omega^2 (v_r t + a) \sin\alpha \mathbf{u} + 2\omega v_r \sin\alpha \mathbf{v}.$$

$\boxed{\mathbf{23}}$ Hệ tọa độ cố định Oxy gắn với nền. Hệ tọa độ động Cs gắn với mặt nghiêng của nêm. Hình 28 vẽ hai vị trí của nêm, trong đó hình vẽ không



Hình 28: Hai vị trí trước và sau của nêm (bài tập 23).

liền nét ứng với vị trí ban đầu của nêm.

Thanh AB chuyển động tịnh tiến, vận tốc của thanh được cho bởi vận tốc của A. Điểm A' là vị trí ban đầu của A (trong hệ cố định). Ta có: $HA = \Delta x$, $\Delta y_A = HA \tan\alpha = \Delta x \tan\alpha$, suy ra vận tốc tuyệt đối của thanh AB: $v_a(A) = v \tan\alpha$, hướng thẳng đứng lên trên. *Kết quả nhận được bằng cách chia hai vế cho* Δt*, rồi qua giới hạn,* $\Delta t \to 0$.

Điểm A'' là vị trí ban đầu của A trên nêm. Ta có: $A'A'' = \Delta s \cos\alpha$, $A'A'' = HA = \Delta x$, suy ra vận tốc tương đối của A: $v_r(A) = v/cos\alpha$, hướng ngược chiều với s. Dùng dữ liệu số:

$$v_a(A) = 30 \tan 30^o = 10\sqrt{3}\ (cm/s), \quad v_r(A) = 30/\cos 30^o 20\sqrt{3}\ (cm/s).$$

Ta có thể giải bằng công thức hợp vận tốc. Trước hết, để ý rằng vận tốc của nêm v là vận tốc theo của A, $v_e(A) = v$. Tính vận tốc tương đối của A, $v_r(A)$ (như trên) rồi dùng công thức hợp vận tốc tính vận tốc tuyệt đối của A, $v_a(A)$.

24 Gọi I, ω_{AB} lần lượt là tâm quay tức thời, vận tốc góc tức thời của thanh

AB. Điểm I chính là giao điểm của O_1A và O_2B. Ở vị trí $\alpha = \beta = 60^o$ tam giác O_1IO_2 là tam giác đều, suy ra: $IA = O_1I - O_1A = 40$ (cm), $IB = O_2I - O_2B = 20$ (cm). Từ công thức vận tốc của chuyển động quay của thanh O_1A và thanh AB ta có

$$10 \times 10\pi = 40\omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = 2,5\pi \ (1/s).$$

Điểm B chuyển động với vận tốc $V_B = 20 \times 2,5\pi = 50\pi \ (cm/s)$.

Vận tốc góc của thanh O_2B sinh viên tự làm.

31 Quả cầu chịu tác dụng của: trọng lực $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, lực cản của môi trường $\mathbf{F}_C = -k\mathbf{v}$ (bỏ qua lực đẩy Archimède). Định luật thứ hai cho

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_C.$$

Chọn hệ trục độ Oy thẳng đứng hướng lên. Chiếu hệ thức vectơ lên trục Oy, ta được:

$$m\ddot{y} = -mg - k\dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g. \qquad (a)$$

Giải phương trình vi phân (a) - cách 1. Tách biến (xem $\dot{y}$ là ẩn hàm),

$$\frac{d\dot{y}}{\frac{k}{m}\dot{y} + g} = -dt,$$

tích phân hai vế

$$\frac{m}{k}\ln\left|\frac{k}{m}\dot{y} + g\right| = -t + C. \qquad (b)$$

Dùng điều kiện đầu $\dot{y}(0) = 0$, ta được $C = \frac{m}{k}\ln g$; thay vào (b), sau một số biến đổi, ta thu được vận tốc của quả cầu:

$$\dot{y} = \frac{mg}{k}\left[\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) - 1\right]. \qquad (c)$$

Để ý rằng khi $t \to +\infty$, $\dot{y} \to -\frac{mg}{k}$ (vận tốc giới hạn). Vận tốc giới hạn này cũng có thể tìm từ phương trình $\mathbf{P} + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}$.

Tích phân (c) và dùng điều kiện đầu $y(0) = 0$ ta được phương trình chuyển động (luật chuyển động):

$$y = \frac{m^2 g}{k^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right] - \frac{mgt}{k}.$$

Cách 2. Phương trình (a) là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{kt}{m}\right).$$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y = C_1(t) + C_2(t) \exp\left(-\frac{kt}{m}\right).$$

$C_1'(t), C_2'(t)$ thỏa hệ

$$\begin{aligned} C_1'(t) + \exp\left(-\tfrac{kt}{m}\right) C_2'(t) &= 0 \\ -\tfrac{k}{m} \exp\left(-\tfrac{kt}{m}\right) C_2'(t) &= -g \end{aligned}$$

Giải ra $C_1'(t), C_2'(t)$, rồi tích phân theo t, cuối cùng ta được

$$y = C_2 \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) + \frac{m^2 g}{k^2} - \frac{mgt}{k} + C_1,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tích phân phụ thuộc điều kiện đầu. Phần còn lại sinh viên tự làm.

$\boxed{\mathbf{33}}$ a) Lực tác dụng lên viên đạn là trọng lực $\mathbf{P}$. Phương trình vi phân chuyển động (định luật thứ hai của Newton)

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P}.$$

Chiếu xuống các trục tọa độ:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0\\ \ddot{y} &= -g\end{aligned}$$

Tích phân hệ phương trình trên, ta được vận tốc của viên đạn (dùng điều kiện đầu, vận tốc):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_0\cos\alpha\\ \dot{y} &= -gt + V_0\sin\alpha\end{aligned}$$

Tích phân lần nữa (dùng điều kiện đầu, vị trí) ta được phương trình chuyển động của viên đạn:

$$\begin{aligned}x &= V_0 t\cos\alpha\\ y &= -\tfrac{1}{2}gt^2 + V_0 t\sin\alpha\end{aligned}$$

Khử t trong hai phương trình trên ta được phương trình quỹ đạo của viên đạn:

$$y = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha.$$

b) Để viên đạn bắn trúng điểm M ta phải có

$$\frac{V_0^2}{4g} = -\frac{1}{2}(1+\tan^2\alpha)\frac{V_0^2}{4g} + \frac{V_0^2}{2g}\tan\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + \frac{3}{2} = 0.$$

Nghiệm: $\tan\alpha = 1$, $\tan\alpha = 3$.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Cơ hệ: khối nước, ban đầu được giới hạn bởi $a-b$, sau khoảng thời gian Δt giới hạn bởi $a'-b'$ (hình 10).

Lực ngoài tác dụng: trọng lực $\mathbf{P}$, phản lực $\mathbf{R}$ của tường tác dụng lên khối nước.

Chọn trục x nằm ngang và áp dụng định lý biến thiên động lượng theo phương x.

$$P_{2x} - P_{1x} = -R\Delta t. \qquad (a)$$

Khối nước ban đầu và khối nước lúc sau có phần chung (2). Nếu giả thiết chuyển động của khối nước là dừng thì

$$P_{2x} - P_{1x} = -P_{1x}^{(1)} = -mv, \qquad (b)$$

trong đó $P_{1x}^{(1)}$ là động lượng lúc đầu của phần (1) còn m là khối lượng của nó. Kết quả này nhận được là do các phần (3) có vận tốc vuông góc với trục x.

Thay (b) vào (a) ta suy ra

$$R = \frac{mv}{\Delta t}. \qquad (c)$$

Nếu nước có mật độ khối là ρ thì khối lượng của phần (1) là

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} v \Delta t$$

và như vậy ($\rho = 1$),

$$R = \rho \frac{\pi d^2 v^2}{4} = 125,6\ N.$$

$\boxed{\textbf{36}}$ Hệ quy chiếu: trục Ox nằm ngang có chiều từ trái qua phải.

Cơ hệ: gồm A, B, sợi dây và lăng trụ. Chú ý, ở đây ta không kể dây và ròng rọc vì chúng không có khối lượng nên chỉ có tác dụng ràng buộc (liên kết) các vật trong hệ (xem hình 11).

Lực ngoài tác dụng: các trọng lực $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}_B$, và phản lực $\mathbf{N}$ của mặt sàn tác dụng lên lăng trụ.

Để áp dụng định lý biến thiên động lượng trên phương Ox, trước hết, ta tìm liên hệ giữa các thành phần vận tốc theo phương x của A, B và lăng trụ. Nếu gọi v là vận tốc của lăng trụ đối với O, v' là thành phần vận tốc theo phương x của B đối với lăng trụ. Thì thành phần vận tốc theo phương x của A đối với lăng trụ (vận tốc tương đối) sẽ là $v' \cos\alpha$ (do dây không giãn). Từ công thức cộng vận tốc, ta có thành phần vận tốc theo phương x của A, B đối với O (vận tốc tuyệt đối) lần lượt là $v' \cos\alpha + v$, $v' + v$.

Do ban đầu hệ đứng yên nên động lượng bằng không, $P_{1x} = 0$. Động lượng lúc sau (khi A đã trượt xuống một khoảng l dọc theo cạnh KL của lăng trụ):

$P_{2x} = m_1(v'\cos\alpha + v) + m_2(v' + v) + mv = (m_1\cos\alpha + m_2)v' + (m_1 + m_2 + m)v.$

Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

Như vậy, theo định lý biến thiên động lượng trên phương Ox,

$$(m_1\cos\alpha + m_2)v' + (m_1 + m_2 + m)v = 0 \Rightarrow v = -\frac{(m_1\cos\alpha + m_2)v'}{m_1 + m_2 + m}.$$

Vế phải của phương trình trên bằng không do tất cả các lực ngoài đều trực giao với Ox. Lấy tích phân hai vế từ 0 đến thời điểm đang xét, ta được:

$$s = -\frac{(m_1\cos\alpha + m_2)l}{m_1 + m_2 + m}.$$

Dấu trừ trong phương trình chỉ thị lăng trụ di chuyển ngược hướng di chuyển của B.

$\boxed{\mathbf{38}}$ Cơ hệ: tấm tròn và người.

Lực ngoài tác dụng: $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ là trọng lực của người và tấm tròn, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$ phản lực liên kết tại các ổ trục (xem hình 13).

Ta có $\sum m_z(\mathbf{F}_k^{(e)}) = \mathbf{0}$ nên mômen động lượng của hệ được bảo toàn theo phương z. Vì ban đầu hệ đứng yên nên $L_z = 0$ tại mọi thời điểm.

Tại thời điểm bất kỳ, giả định vận tốc của người và vectơ vận tốc góc của tấm tròn như hình vẽ. Lúc đó vận tốc tuyệt đối của người $v = r\omega + u$. Mômen động lượng của hệ đối với trục z:

$$L_z = \underbrace{J_z\omega}_{\text{tấm tròn}} + \underbrace{\frac{P}{g}r(r\omega + u)}_{\text{người}} = \frac{r^2}{2g}(Q + 2P)\omega + \frac{P}{g}ru,$$

trong đó ta đã dùng công thức tính mômen quán tính của tấm tròn đối với trục z, $J_z = Qr^2/2g$.

Từ $L_z = 0$ ta suy ra

$$\omega = -\frac{2Pu}{r(Q + 2P)}.$$

Chú ý, dấu trừ trong biểu thức ω chứng tỏ vận tốc góc có chiều ngược với chiều giả thiết.

$\boxed{\textbf{39}}$ Xem hình 14. *Ở đây, vì lý do tiết kiệm, chúng tôi không vẽ hình lại cũng như không thêm những chi tiết bổ sung trong quá trình giải, chẳng hạn như sơ đồ các lực ngoài tác dụng lên hệ, hệ tọa độ được dùng. Nhưng trong khi trình bày lời giải các bạn nên vẽ ra để lời giải được rõ ràng hơn.*

Cơ hệ: hình trụ, sợi dây và quả cân A.

Lực ngoài: trọng lực $\mathbf{P}$ và phản lực $\mathbf{N}$ tác dụng lên hình trụ, trọng lực $\mathbf{Q}$ tác dụng lên quả cân A.

Hệ tọa độ: Gốc O "tâm" của hình tru, trục Ox hướng xuống dưới, trục Oy nằm ngang hướng từ phải qua trái, và như vậy trục Oz vuông góc và hướng vào trong mặt phẳng hình vẽ. *Chọn hệ tọa độ như thế này thì hình trụ sẽ quay theo chiều thuận (ngược chiều kim đồng hồ).*

Mômen động lượng của hệ đối với trục z:

$$L_z = \underbrace{J_z\omega}_{\text{hình trụ}} + \underbrace{\frac{Q}{g}v_A R}_{\text{quả cân } A} = \frac{R^2\omega(P+Q)}{g}.$$

Ở đây ta đã dùng công thức tính mômen quán tính của hình trụ $J_z = PR^2/g$, và liên hệ giữa vận tốc quả cân A với vận tốc góc của hình trụ, $v_A = \omega R$ (do dây không giãn). Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

Mômen của lực ngoài đối với trục z (hai lực $\mathbf{P}, \mathbf{N}$ có đường tác dụng cặt trục z nên mômen của chúng bằng không):

$$M_z(\mathbf{Q}) = RQ.$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng (dạng vi phân) ta được:

$$\frac{R^2\epsilon(P+Q)}{g} = RQ.$$

Suy ra gia tốc góc của hình trụ:

$$\epsilon = \frac{gQ}{R(P+Q)}.$$

$\boxed{40}$ Cơ hệ: ròng rọc, sợi dây và hai vật A, B.

Lực ngoài tác dụng: $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{Q}$ và phản lực $\mathbf{R}$ (hình 15).

Hệ tọa độ: $Oxyz$ với Ox nằm ngang hướng từ trái qua phải, Oy thẳng đứng hướng lên và Oz vuông góc với mặt phẳng hình vẽ hướng ra ngoài (trang giấy).

Để ý rằng, nếu vật A (B) có vận tốc v thì ròng rọc có $\omega = v/r$.

Mômen động lượng của hệ đối với trục z vuông góc với mặt phẳng hình vẽ

$$L_z = \underbrace{J_z\omega}_{\text{ròng rọc}} + \underbrace{\frac{P_1}{g}vr}_{\text{vật } A} + \underbrace{\frac{P_2}{g}vr}_{\text{vật } B} = \frac{rv(Q + P_1 + P_2)}{g}.$$

Ở đây ta đã dùng công thức $J_z = Qr^2/2$ tính mômen quán tính của ròng rọc. Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục z, ta có

$$\dot{L}_z = (P_1 - P_2)r \Leftrightarrow \frac{r(Q + P_1 + P_2)}{g}w = (P_1 - P_2)r \quad (w = \dot{v}),$$

suy ra

$$w = \frac{(P_1 - P_2)g}{Q + P_1 + P_2}.$$

$\boxed{41}$ Thanh OA thực hiện chuyển động quay quanh O với vận tốc góc ω_0 nên động năng bằng

$$\frac{1}{2}J_1\omega_0^2 = \frac{1}{6}\rho r^3\omega_0^2.$$

Ở đây, ta đã dùng công thức $J_1 = \frac{1}{3}Mr^2$ với $M = \rho r$.

Thanh AB chuyển động song phẳng. Chuyển động tức thời của nó là chuyển động quay quanh tâm quay tức thời I (hình vẽ) với vận tốc góc ω_1. Ta thấy A là trung điểm cạnh huyền của tam giác vuông ΔOBI vuông tại B, nên $IA = OA = r$. Vì $v(A) = OA\omega_0 = r\omega_0$ (trong chuyển động của thanh OA), $v(A) = IA\omega_1 = r\omega_1$ (trong chuyển động của thanh AB) nên $\omega_1 = \omega_0$. Để tính động năng của thanh AB ta cần tính mômen quán tính J_2 của nó đối với trục đi qua I. Trước hết, xác định IJ với J là khối tâm (trung điểm) của AB. Áp dụng công thức côsin cho tam giác ΔIAJ, ta có:

$$IJ^2 = IA^2 + AJ^2 - 2AI \cdot AJ \cos \angle IAJ = r^2 \left(\frac{5}{4} - \cos 2\varphi \right).$$

Do đó theo công thức Huygens

$$J_2 = \frac{1}{12}\rho r^3 + \rho r^3 \left(\frac{5}{4} - \cos 2\varphi \right) = \rho r^3 \left(\frac{4}{3} - \cos 2\varphi \right).$$

Động năng của thanh AB bằng

$$\frac{1}{2}\rho r^3 \left(\frac{4}{3} - \cos 2\varphi \right) \omega_0^2.$$

Tóm lại, động năng của hệ bằng

$$\frac{1}{6}\rho r^3 \omega_0^2 + \frac{1}{2}\rho r^3 \left(\frac{4}{3} - \cos 2\varphi \right) \omega_0^2 = \rho r^3 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) \omega_0^2.$$

42 Cơ hệ: đĩa và dây.

Lực ngoài tác dụng: **P** trọng lực đặt lên đĩa.

Hệ tọa độ được chọn có gốc đặt tại A, Ax thẳng đứng hướng xuống dưới, Ay nằm ngang hướng từ trái qua phải, Az vuông góc với mặt phẳng hình vẽ (đầu bài) hướng từ ngoài vào trong (trang giấp). Với cách chọn hệ tọa độ này thì đĩa quay theo chiều thuận.

Để tính mômen động lượng của hệ ta dùng hệ tọa độ König $Cx'y'z'$ (hình tịnh tiến của $Axyz$ theo vectơ $\overrightarrow{AC}$). Để ý rằng, đĩa thực hiện chuyển động song phẳng, do dây không giãn, có chuyển động tức thời là chuyển động quay quanh trục đi qua "điểm tiếp xúc" của dĩa với trục Ax với vận tốc góc ω, $v_C = r\omega$. Nếu xét chuyển động của điểm này đối với hệ König (xem như đứng yên), thì nó chuyển động quay quanh C với cùng vận tốc góc. Như vậy,

$$L_z = mrv_C + J_C\omega = \frac{3}{2}mr^2\omega,$$

trong đó J_C là mômen quán tính của đĩa đối với trục đi qua C và cùng hướng với Az. Ở đây ta đã dùng công thức $J_C = mr^2/2$. Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

Mômen của lực ngoài (đặt tại C): mgr.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng:

$$\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} = mgr \Rightarrow \epsilon = \dot{\omega} = \frac{2g}{3r}.$$

Vì C chuyển động thẳng đứng nên gia tốc của C: $w_C = \dot{v}_C = 2g/3$.

Để tìm lực căng ta xét hệ chỉ gồm đĩa. Khi đó, lực ngoài tác dụng lên hệ gồm $\mathbf{P}$ và lực căng dây $\mathbf{T}$. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm, ta có:

$$mw_C = mg - T \Rightarrow T = mg - \frac{2mg}{3} = \frac{mg}{3}.$$

Cách giải khác

Phần đầu của bài tập này có thể giải bằng cách dùng định lý biến thiên động năng. Ở đây ta cũng dùng hệ tọa độ König khi tính động năng. Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2.$$

Công suất của lực ngoài:

$$W = mgv_C = mgr\omega.$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng:

$$\frac{3}{2}mr^2\omega\dot{\omega} = mgr\omega \Rightarrow \epsilon = \dot{\omega} = \frac{2g}{3r}.$$

44 Hệ là hạt chỉ chuyển động trong mặt phẳng qua gốc nên có 2 bậc tự do [*Chuyển động của hạt dưới tác dụng của lực xuyên tâm là chuyển động phẳng. Đây là ràng buộc của hạt*]. Tọa độ suy rộng (dùng tọa độ cực có gốc đặt tại gốc).

Động năng của hạt là (xem hình 19)

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Thế năng của hạt (đối với vô cùng) là

$$V = -\frac{GMm}{r}.$$

Hàm Lagrange $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}.$$

Tính các đạo hàm rồi thay vào hệ phương trình Lagrange, ta được:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - m\left(r\dot{\theta}^2 - \frac{MG}{r^2}\right) &= 0, \\ m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Tích phân đầu: $r^2\dot{\theta}$ =const.
Chú ý, ta có thể nhận ra chuyển động có một tích phân đầu từ nhận xét $\partial L/\partial\theta$ (hàm Lagrange không phụ thuộc θ, nghĩa là θ là tọa độ cyclic). Tích phân đầu này chính là mômen động lượng của hạt $mr^2\dot{\theta}$ được bảo toàn.
$\boxed{\mathbf{45}}$ Hệ là hạt. Vì vectơ bán kính của hạt:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r,$$

trong đó $\mathbf{e}_r = (\sin\alpha\cos\varphi, \sin\alpha\sin\varphi, \cos\alpha)$, nên hệ có 2 bậc tự do. Tọa độ suy rộng: r, θ. Vận tốc của hạt:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r.$$

Để ý rằng,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\sin\alpha(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \dot{\varphi}\sin\alpha\mathbf{e}_\varphi.$$

Như vậy, động năng của hạt:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha).$$

Thế năng của hạt (đối với O):

$$V = mgr\cos\alpha.$$

Hàm Lagrange:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha) - mgr\cos\alpha.$$

Hệ phương trình Lagrange (sv nên tính toán tường minh)

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + g\cos\alpha &= 0, \\ 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} &= 0 \quad (\sin\alpha > 0). \end{aligned}$$

Do hàm Lagrange không phụ thuộc φ nên φ là tọa độ cyclic. Tích phân đầu: $r^2 \dot{varphi} =$ const. Sv tự giải thích ý nghĩa vật lý.

$\boxed{\textbf{46}}$ Hệ hai bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng: x, chuyển dịch của nêm đối với điểm cố định trên sàn; y, chuyển dịch của vật đối với điểm cố định trên nêm.

Động năng và thế năng của hệ:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha), \\ V &= -mgy\sin\alpha. \end{aligned}$$

Hàm Lagrange:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + mgy\sin\alpha.$$

Tính các đạo hàm

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + (m\cos\alpha)\dot{y}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + (m\cos\alpha)\ddot{y};$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = mg\sin\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + (m\cos\alpha)\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} + (m\cos\alpha)\ddot{x}.$$

Hệ phương trình Lagrange loại hai:

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x}+(m\cos\alpha)\ddot{y} &= 0,\\ m\ddot{y}+(m\cos\alpha)\ddot{x}-mg\sin\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$\ddot{x}=-\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha},\quad \ddot{y}=-\frac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}.$$

47 Nếu không có điều kiện "lăn không trượt" thì hệ hai bậc tự do với các tọa độ suy rộng: θ, góc giữa OG và trục thẳng đứng hướng xuống; φ, góc quay của hình trụ (đối với vị trí tham chiếu nào đó). Điều kiện lăn không trượt cho

$$(b-a)\dot{\theta}=a\dot{\varphi}\Rightarrow(b-a)\theta=a\varphi. \qquad (a)$$

Ở đây ta đã chọn vị trí tham chiếu thích hợp để cho $\varphi=0$ khi $\theta=0$. Vậy hệ một bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng là θ.

Động năng của hệ:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m((b-a)\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2\\ &= \frac{3}{4}m(b-a)^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

trong đó ta đã dùng phương trình liên kết (a) và công thức tính mômen quán tính của hình trụ $J=ma^2/2$.

Thế năng:

$$V=-mg(b-a)\cos\theta.$$

Hàm Lagrange

$$L=T-V=\frac{3}{4}m(b-a)^2\dot{\theta}^2+mg(b-a)\cos\theta.$$

Tính các đạo hàm:

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mg(b-a)\sin\theta,\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{3}{2}m(b-a)^2\dot{\theta},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{3}{2}m(b-a)^2\ddot{\theta}.$$

Phương trình Lagrange loại hai:

$$\frac{3}{2}m(b-a)^2\ddot{\theta} + mg(b-a)\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(b-a)}\sin\theta = 0.$$

(chú ý, phương trình này trùng với phương trình chính xác cho dao động con lắc đơn có chiều dài $l = 3(b-a)/2$).

Với giả thiết dao động bé ta xấp xỉ $\sin\theta \approx \theta$ trong phương trình Lagrange, ta được

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(b-a)}\theta = 0.$$

Chu kỳ của dao động theo công thức của con lắc đơn

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3(b-a)}{2g}}.$$

$\boxed{\textbf{48}}$ Hệ hai bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng: x, θ như trên hình 23. Điểm đặc biệt ở thí dụ này là lực F tác dụng lên P_2 được cho phụ thuộc thời gian (không bảo toàn) nên ta cần tính các lực suy rộng! Chuyển dịch ảo của P_2 theo phương ngang:

$$\delta x + a\cos\theta\delta\theta.$$

nên công phân tố của lực chủ động (chỉ có lực F) là

$$F(t)(\delta x + a\cos\theta\delta\theta) = Q_x\delta x + Q_\theta\delta\theta,$$

suy ra

$$Q_x = F(t), \quad Q_\theta = (a\cos\theta)F(t).$$

Động năng của hệ:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + a\cos\theta\dot{\theta})^2 + (a\sin\theta\dot{\theta})^2] \\ &= m\dot{x}^2 + (ma\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Hệ phương trình Lagrange loại hai:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[2m\dot{x} + (ma\cos\theta)\dot{\theta}] &= F(t),\\ \frac{d}{dt}[(ma\cos\theta)\dot{x} + ma^2\dot{\theta}] - [-(ma\sin\theta)\dot{x}\dot{\theta}] &= (a\cos\theta)F(t).\end{aligned}$$

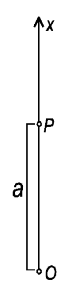
Phụ lục A

Đề thi mẫu

Câu 1 (2đ) Một con ong bay trên một quỹ đạo theo luật chuyển động cho trong tọa độ cực là

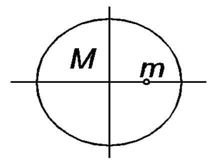
$$r = \frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t), \quad \varphi = \frac{t}{\tau} \quad (0 \le t \le 2\tau),$$

trong đó b và τ là những hằng số dương. Chứng tỏ rằng tốc độ nhỏ nhất của con ong là b/τ. Tìm gia tốc của con ong tại thời điểm này.
Câu 2 (2đ) Một chất điểm P khối lượng m chuyển động dưới lực hấp dẫn



Hình 1: Câu 2

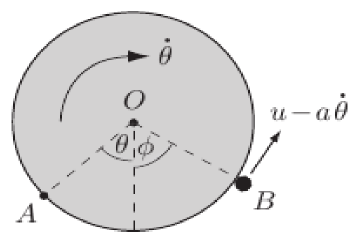
của vật có khối lượng M đặt tại O. Ban đầu P ở cách O khoảng cách a, được bắn ra xa O với tốc độ $(2MG/a)^{1/2}$. Tìm khoảng cách từ P đến O tại thời điểm t. Chứng tỏ P chuyển động ra vô cùng. Ở đây G là hằng số hấp dẫn.
Câu 3 (1đ) Cho đĩa tròn đồng chất bán kính a, khối lượng M. Để thay đổi mômen quán tính của đĩa người ta gắn thêm vào đĩa khối lượng m cách tâm khoảng cách $a/2$. Tính mômen quán tính của hệ đối với trục đi qua tâm và



Hình 2: Câu 3

vuông góc với đĩa. Nếu không thêm và khối lượng m thì trục phải dời song song đến điểm nào trên đĩa để mômen quán tính vẫn bằng như trường hợp trước?

Câu 4 (2.5đ) Một đĩa tròn khối lượng M bán kính a có thể quay không ma



Hình 3: Câu 4

sát quanh trục nằm ngang đi qua tâm của nó. Một con bọ khối lượng m chạy với vận tốc không đổi u quanh mép đĩa. Ban đầu đĩa được giữ ở trạng thái nghỉ và được thả ra khi con bọ ở vị trí thấp nhất. Tính mômen động lượng của hệ (gồm đĩa và con bọ) đối với trục quay. Viết phương trình biến thiên động lượng của hệ. Chứng tỏ rằng

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4mg}{a(M+2m)}(\cos\varphi - 1) + \frac{u^2}{a^2}.$$

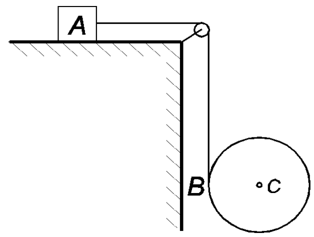
trong đó φ là góc xác định vị trí con bọ so với phương thẳng đứng hướng xuống.

Câu 5 (2.5đ) Một ống trụ bán kính a, trong lượng P_1 có cuốn xung quanh bằng một sợi dây. Dây vắt qua ròng rọc cố định O rồi nối với vật nặng A trọng lượng P_2. Vật A trượt trên mặt phẳng ngang có hệ số ma sát f. Bỏ qua ma sát ở ổ trục O. Viết phương trình Lagrange loại hai cho hệ. Tìm gia tốc của A và tâm C của ống trụ.

Chú thích

Đề thi gồm 5 câu được cấu trúc như sau:

Câu 1 - Động học điểm; kiểm tra kiến thức và kỹ năng tính toán các



Hình 4: Câu 5

khái niệm động học cơ bản: phương trình (luật) chuyển động, quỹ đạo, vận tốc, gia tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp, bán kính cong.

Câu 2 - Động lực học điểm; kiểm tra khả năng thiết lập phương trình vi phân chuyển động và kỹ năng giải phương trình vi phân.

Câu 3 - Kiểm tra kiến thức về khối tâm, mômen quán tính.

Câu 4 - Kiểm tra kỹ năng vận dụng một trong ba định luật tổng quát (động lượng, mômen động lượng và động năng).

Câu 5 - Cơ học giải tích; kiểm tra kỹ năng phân tích liên kết, thiết lập phương trình Lagrange loại hai.

Đáp án

Câu 1

Vận tốc của con ong tại thời điểm t:

$$v_r = \frac{2b}{\tau^2}(\tau - t), \quad v_\varphi = \frac{bt}{\tau^3}(2\tau - t).$$

Tốc độ của con ong tại thời điểm t:

$$\begin{aligned} v &= \frac{b}{\tau^2}\sqrt{4(\tau - t)^2 + \frac{1}{\tau^2}(2\tau t - t^2)^2}, \\ v^2 &= \frac{b^2}{\tau^4} f(t). \end{aligned}$$

Ở đây ta đã đặt $f(t) = 4(\tau - t)^2 + \frac{1}{\tau^2}(2\tau t - t^2)^2$. Để tìm tốc độ nhỏ nhất của ong ta khảo sát hàm $f(t)$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -8(\tau - t) + \frac{2}{\tau^2}(2\tau t - t^2)(2\tau - 2t) \\ &= -\frac{4}{\tau^2}(\tau - t)(t^2 - 2\tau t + 2\tau^2) \end{aligned}$$

Xét dấu $f'(t)$ trong khoảng $[0, 2\tau]$ có thể thấy $f(t)$ nhỏ nhất (và như vậy vận tốc nhỏ nhất) khi $t = \tau$. Vận tốc nhỏ nhất bằng b/τ.

Gia tốc của con ong tại thời điểm t:

$$w_r = -\frac{2b}{\tau^2} - \frac{bt}{\tau^4}(2\tau - t), \quad w_\varphi = \frac{4b}{\tau^3}(\tau - t).$$

Lúc $t = \tau$,

$$w_r = -\frac{3b}{\tau^2}, \quad w_\varphi = 0 \Rightarrow w = \frac{3b}{\tau^2}.$$

Câu 2

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Lực tác dụng: lực hấp dẫn có độ lớn $F = GMm/x^2$ và hướng về O.

Phương trình vi phân chuyển động

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{x^2} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}.$$

Ký hiệu $v = \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \dot{v}$. Nhân vào hai vế phương trình với $vdt = dx$, ta được

$$\frac{1}{2}d(v^2) = -\frac{GMdx}{x^2}.$$

Tích phân hai vế từ thời điểm đầu đến thời điểm t:

$$v(t)^2 - v(0)^2 = 2GM\left[\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)}\right].$$

Dùng điều kiện đầu, $v(0)^2 = 2MG/a$, $x(0) = a$, ta suy ra

$$v(t) = \sqrt{\frac{2GM}{x(t)}}.$$

Nhân vào hai vế với dt, ta được

$$dx = \sqrt{\frac{2GM}{x}}dt \Rightarrow x^{1/2}dx = \sqrt{2GM}dt.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$x(t)^{3/2} - x(0)^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{2GM}t \Rightarrow x(t) = \left(a^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{2GM}t\right)^{2/3}.$$

Đây chính là khoảng cách từ O đến P tại thời điểm t. Cho $t \to \infty$, $x(t) \to \infty$, nghĩa là P chuyển động ra vô cùng.

Câu 3

Mômen quán tính của hệ có tính chất cộng tính. Gọi Δ là trục đi qua tâm (khối tâm của đĩa), ta có

$$J = \frac{1}{2}Ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2(2M+m)}{4}.$$

Gọi Δ' là trục cần tìm và d là khoảng cách giữa hai trục. Theo định lý Huygens,

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + Md^2 = \frac{1}{2}Ma^2 + Md^2.$$

Để mômen quán tính vẫn bằng như trường hợp trước, ta phải có

$$\frac{1}{2}Ma^2 + Md^2 = \frac{a^2(2M+m)}{4} \Rightarrow d = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Vậy trục Δ' phải chọn đi qua điểm cách tâm đĩa khoảng cách d xác định như trên.

Câu 4

Gọi θ là góc quay của đĩa (chiều chọn như hình vẽ).

Đĩa thực hiện chuyển động quay nên mômen động lượng đối với trục quay là

$$L_{\text{đ}} = J\dot{\theta} = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}.$$

Chuyển động của con bọ gồm: chuyển động tương đối - chuyển động tròn với vận tốc dài không đổi u; chuyển động theo là chuyển động quay quanh trục cùng với đĩa. Vận tốc tuyệt đối của con bọ:

$$-u + a\dot{\theta}.$$

(chú ý kỹ cách chọn chiều quay dương). Mômen động lượng của con bọ:

$$L_b = -ma(u - a\dot{\theta}).$$

Mômen động lượng của hệ đối với trục quay:

$$L = L_{\text{đ}} + L_b = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta} - ma(u - a\dot{\theta}).$$

Lực tác dụng lên hệ: trọng lực của đĩa và của con bọ. Lực tác dụng lên đĩa quy về lực đặt tại điểm mà trục quay đi qua nên mômen của lực bằng không. Mômen của lực tác dụng lên hệ cũng là mômen của lực tác dụng lên con bọ:

$$M_O = mga\sin\varphi$$

(chú ý kỹ cách chọn chiều quay dương). Ở đây φ là góc xác định vị trí con bọ đối với phương thẳng đứng hướng xuống.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng của hệ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta} - ma(u - a\dot{\theta})\right] &= mga\sin\varphi \\ \frac{(M+2m)a^2\ddot{\theta}}{2} &= mga\sin\varphi. \end{aligned}$$

Để ý rằng góc chuyển động của con bọ tại thời điểm t so với vị trí ban đầu bằng $\theta+\varphi$. Con bọ chuyển động đều nên $a(\theta+\varphi)=ut$, suy ra $\dot\theta=(u/a)-\dot\varphi$, $\ddot\varphi=-\ddot\theta$. Thay vào phương trình biến thiên mômen động lượng ta được sau một số biến đổi:

$$\ddot\varphi=-\frac{2mg}{a(M+2m)}\sin\varphi.$$

Nhân hai vế với $\dot\varphi dt=d\varphi$, ta được:

$$\frac{1}{2}d(\dot\varphi)^2=-\frac{2mg}{a(M+2m)}\sin\varphi d\varphi.$$

Tích phân hai vế từ thời điểm đầu đến thời điểm t:

$$\frac{1}{2}[\dot\varphi(t)^2-\dot\varphi(0)^2]=\frac{2mg}{a(M+2m)}[\cos(\varphi(t))-\cos(\varphi(0))].$$

Dùng điều kiện đầu, $\varphi(0)=0$, $\dot\varphi(0)=u/a$, ta suy ra:

$$\dot\varphi^2=\frac{4mg}{a(M+2m)}(\cos\varphi-1)+\frac{u^2}{a^2}.$$

Câu 5

Hệ: ống trụ tâm C và vật nặng A

Vật A thực hiện chuyển động tịnh tiến theo phương ngang. Hình trụ thực hiện chuyển động song phẳng, bao gồm: tịnh tiến theo phương thẳng đứng (cùng với A) và quay (tức thời) quanh B. Hệ có 2 bậc tự do. Tọa độ suy rộng: x - vị trí A theo phương ngang, φ góc quay của ống trụ.

Các lực chủ động: trọng lực P_1, lực ma sát $F_{ms}=fP_2$, trọng lực P_2.

Động năng của A:

$$T_A=\frac{P_2}{2g}\dot x^2.$$

Để tính động năng ống trụ, dùng công thức tính động năng theo khối tâm C, trước hết ta tính vận tốc của C bằng công thức Euler (điểm cực là B - tâm quay tức thời)

$$v_C = \underbrace{\dot{x}}_{v_B} + a\dot{\varphi} \Rightarrow w_C = \ddot{x} + a\ddot{\varphi}.$$

Động năng ống trụ ($J = Ma^2$)

$$T_C = \frac{P_1}{2g}(\dot{x} + a\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{P_1}{2g}(\dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\varphi} + a^2\dot{\varphi}^2) + \frac{P_1}{2g}a^2\dot{\varphi}^2.$$

Động năng của hệ:

$$T = T_A + T_C = \frac{P_1 + P_2}{2g}\dot{x}^2 + \frac{P_1 a}{g}\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{P_1 a^2}{g}\dot{\varphi}^2.$$

Công của các lực chủ động (giúp tìm các lực suy rộng):

$$-fP_2\delta x + P_1\delta x + P_1 a\delta\varphi \Rightarrow Q_x = -fP_2 + P_1,\ Q_\varphi = P_1 a.$$

Tính các đạo hàm rồi thay vào phương trình Lagrange, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{x} + \frac{P_1 a}{g}\ddot{\varphi} &= -fP_2 + P_1, \\ \frac{P_1 a}{g}\ddot{x} + \frac{2P_1 a^2}{g}\ddot{\varphi} &= P_1 a. \end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{g(P_1 - 2fP_2)}{P_1 + 2P_2} \quad \text{(gia tốc của } A), \\ \ddot{\varphi} &= \frac{gP_2(1 + 2f)}{a(P_1 + 2P_2)} \Rightarrow w_C = \frac{g(P_1 + P_2)}{P_1 + 2P_2} \quad \text{(gia tốc của } C). \end{aligned}$$

Phụ lục B

Đề thi môn Cơ học lý thuyết

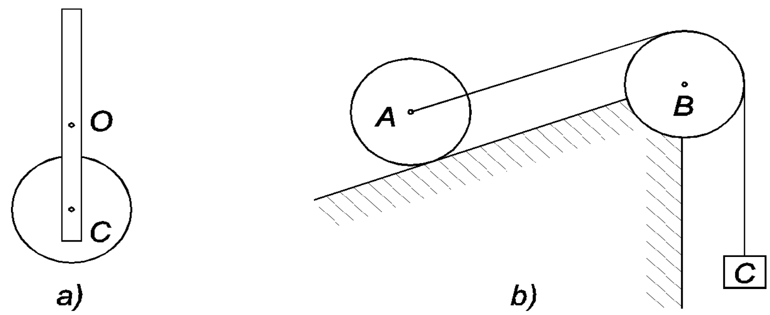
Thời gian: 120 phút
Ngày thi: 4/6/2009
(Sinh viên được phép tham khảo tài liệu chỉ định)
Câu 1 (2đ) Điểm chuyển động trên đường cycloid,

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta),$$

theo luật $\theta = bt/a$, trong đó a và b là những hằng số dương. Ở thời điểm bất kỳ, xác định vận tốc, gia tốc của điểm và bán cong của quỹ đạo tại vị trí của điểm.
Câu 2 (2.5đ) Một vật khối lượng m trượt không ma sát trên mặt phẳng nghiêng một góc α $(0 < \alpha < \pi/2)$ so với phương ngang. Cho biết vật chịu sức cản không khí có độ lớn tỉ lệ với bình phương vận tốc, kv^2. Ban đầu vật ở đỉnh dốc O và được buông ra không vận tốc đầu. Viết phương trình vi phân chuyển động của vật. Chứng minh vận tốc của vật biến thiên theo quy luật

$$v = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}\left(1 - e^{-2kx/m}\right)},$$

trong đó x là khoảng cách từ vật đến đỉnh dốc. Tìm vận tốc giới hạn của vật.
Câu 3 (1đ) Một quả lắc đồng hồ gồm: thanh đồng chất chiều dài $2a$, khối lượng m và đĩa tròn đồng chất bán kính $a/2$, khối lượng M gắn với nhau như hình 1. Tính mômen quán tính của quả lắc đối với trục đi qua O (điểm giữa của thanh), cho biết $OC = 3a/4$.



Hình 1: a) Câu 3; b) Câu 5.

Câu 4 (2đ) Một vật khối lượng $4m$ ở trạng thái nghỉ (đứng yên) khi nó bị nổ tung thành ba mảnh có khối lượng lần lượt là $2m$, m và m. Sau khi nổ tung, hai mảnh khối lượng m được quan sát thấy chuyển động với cùng tốc độ u theo hai hướng hợp với nhau góc 120^o. Tìm vận tốc của mảnh có khối lượng $2m$. Tính động năng toàn phần của hệ (gồm ba mảnh). Vị trí ban đầu của vật là điểm gì của hệ?

Câu 5 (2.5đ) Con lăn A lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng một góc α so với phương ngang, làm vật C trọng lượng P được nâng lên nhờ một sợi dây vắt qua ròng rọc B. Con lăn A và ròng rọc B là hai đĩa tròn đồng chất có cùng trọng lượng Q và bán kính R. Bỏ qua ma sát lăn và ma sát của trục ròng rọc. Viết phương trình Lagrange loại hai cho hệ. Chứng minh gia tốc của C bằng

$$w_C = \frac{(Q\sin\alpha - P)g}{2Q + P}.$$

Hãy chỉ ra điều kiện trên các dữ kiện của đầu bài (không được cho một cách tường minh).

Đáp án

Câu 1

Vận tốc:

$$\dot{x} = b(1-\cos\theta), \quad \dot{y} = b\sin\theta \;\Rightarrow\; v = b\sqrt{2(1-\cos\theta)}.$$

Gia tốc:

$$\ddot{x} = \frac{b^2}{a}\sin\theta, \quad \ddot{y} = \frac{b^2}{a}\cos\theta \;\Rightarrow\; w = \frac{b^2}{a}.$$

Tính bán kính cong. Gia tốc tiếp:

$$w_t = \dot{v} = \frac{b^2}{a}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}.$$

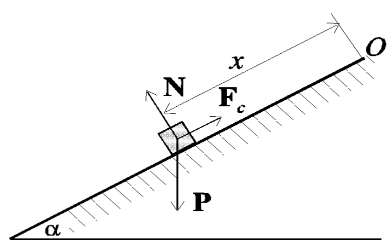
Gia tốc pháp:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}.$$

Suy ra

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = 2a\sqrt{2(1-\cos\theta)}.$$

Câu 2



Hình 1: Câu 2.

Hệ quy chiếu được chọn như hình vẽ, trục Ox hướng song song với mặt nghiêng. Lực tác dụng lên vật: trọng lực $\mathbf{P}$, phản lực $\mathbf{N}$ và lực cản không khí $\mathbf{F}_c$.

Chiếu phương trình vi phân chuyển động (định luật thứ hai của Newton) lên trục x, ta được:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - k\dot{x}^2.$$

Nhân vào hai vế với $\dot{x}dt = dx$, ta được:

$$\frac{m}{2}d(v^2) = (mg\sin\alpha - kv^2)dx,$$

trong đó $v = \dot{x}$. Tách biến,

$$\frac{md(v^2)}{2(mg\sin\alpha - kv^2)} = dx,$$

rồi tích phân hai vế (chú ý, biến lấy tích phân bên vế trái là v^2), ta được:

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg\sin\alpha - kv^2|\Big|_{v^2(0)}^{v^2} = x - x(0).$$

Dùng điều kiện đầu, $v(0) = 0, x(0) = 0$,

$$\ln\left(\frac{mg\sin\alpha - kv^2}{mg\sin\alpha}\right) = -\frac{2kx}{m},$$

suy ra

$$v = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}\left(1 - e^{-2kx/m}\right)}.$$

Qua giới hạn, $t \to \infty$, ta thu được (do $x \to \infty$):

$$v_{gh} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}\left(1 - e^{-2kx/m}\right)} = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}}.$$

Câu 3

Mômen quán tính của thanh đối với trục đi qua O:

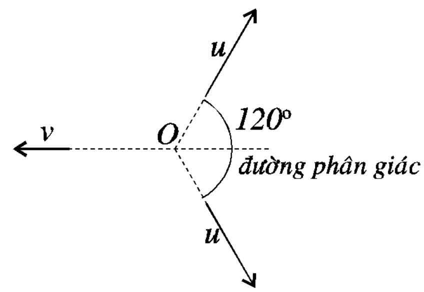
$$J_t = \frac{1}{3}m(2a)^2 = \frac{4ma^2}{3}.$$

Mômen quán tính của đĩa đối với trục đi qua O (dùng công thức Huygens):

$$J_đ = \frac{1}{2}M\left(\frac{a}{2}\right)^2 + M\left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{11Ma^2}{16}.$$

Vậy, mômen quán tính của quả lắc đối với trục qua O:

$$J = J_t + J_đ = \left(\frac{4m}{3} + \frac{11M}{16}\right)a^2.$$



Hình 2: Câu 4.

Câu 4

Hệ gồm ba vật có khối lượng lần lượt là m, m, $2m$ (ban đầu chúng kết dính với nhau). Theo giả thiết ban đầu chúng đứng yên, điều đó có nghĩa là lực tác dụng lên chúng bằng không! Ta áp dụng định lý bảo toàn động lượng. Gọi v là độ lớn vận tốc của vật $2m$. Do động lượng ban đầu của hệ bằng không nên động lượng của hệ lúc sau cũng vậy. Do đó vận tốc của vật $2m$ có phương chiều như hình vẽ, và độ lớn được tính nhờ sự bảo toàn động lượng

$$mu\cos 60^o + mu\cos 60^o - 2mv = 0 \;\Rightarrow\; v = \frac{u}{2}.$$

Động năng của hệ:

$$T = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{2m}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{5mu^2}{4}.$$

Vị trí ban đầu của vật (O) là khối tâm của hệ.

Câu 5

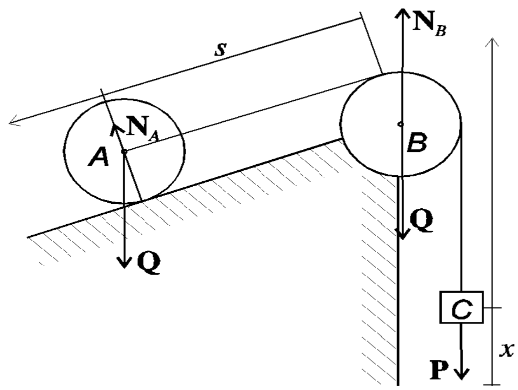
Cơ hệ gồm: con lăn A, ròng rọc B, vật C. Lực chủ động tác dụng lên hệ: trọng lực $\mathbf{Q}$, phản lực $\mathbf{N}_A$, trọng lực $\mathbf{Q}$, phản lực $\mathbf{N}_B$, trọng lực $\mathbf{P}$ (xem hình vẽ).

Liên kết:

Con lăn A chuyển động song phẳng. Chuyển dịch tịnh tiến s và quay quanh tâm góc φ. Do lăn trượt nên $\delta s = R\delta\varphi$ ($\dot{s} = R\dot{\varphi}$).

Ròng rọc B thực hiện chuyển động quay góc φ (chọn gốc thích hợp).

Vật C dịch chuyển tịnh tiến x. Do dây không giãn $\delta x = \delta s$ ($\dot{x} = \dot{s}$). Như vậy, hệ có 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng là x (tọa độ vật C).



Hình 3: Câu 5.

Động năng của con lăn A:

$$T_A = \frac{Q}{2g}\dot{s}^2 + \frac{QR^2}{4g}\dot{\varphi}^2 = \frac{3Q}{4g}\dot{x}^2.$$

Động năng của ròng rọc B:

$$T_B = \frac{QR^2}{4g}\dot{\varphi}^2 = \frac{Q}{4g}\dot{x}^2.$$

Động năng của vật C:

$$T_C = \frac{P}{2g}\dot{x}^2.$$

Động năng của hệ:

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{P + 2Q}{2g}\dot{x}^2.$$

Công toàn phần do lực chủ động tác dụng lên hệ:

$$\delta W = Q \sin\alpha \delta s - P\delta x = (Q\sin\alpha - P)\delta x.$$

Do đó, lực suy rộng $Q_x = Q\sin\alpha - P$.

Tính các đạo hàm rồi thay vào phương trình Lagrange, ta được:

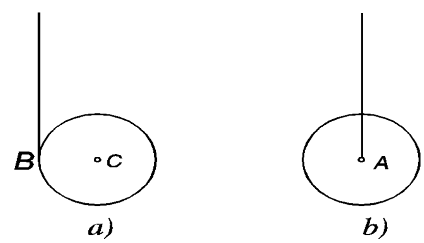
$$\frac{P+2Q}{g}\ddot{x} = Q\sin\alpha - P \ \Rightarrow\ w_C = \ddot{x} = \frac{(Q\sin\alpha - P)g}{P+2Q}.$$

Điều kiện: để vật C đi lên ta phải có điều kiện $Q\sin\alpha \geq P$.

Lời bàn

Câu 4 Câu này thường làm cho các bạn lúng túng về lực tác dụng lên hệ. Tuy nhiên, nếu để ý đến cụm từ "ở trạng thái nghỉ (đứng yên)" thì ta có thể xem, theo định luật thứ nhất của Newton, hệ không chịu tác dụng bởi lực nào cả, hay nói khác đi, các lực tác dụng lên hệ cân bằng.

Câu 5 Một số bạn cho là hệ có 2 bậc tự do! Thật ra với điều kiện "lăn



Hình 4: Tính động năng trong chuyển động song phẳng.

không trượt" của con lăn thì bài này chỉ có 1 bậc tự do. Một số bạn áp dụng máy móc cách tính động năng của con lăn giống như cách tính động năng của ống trụ (câu 5 của đề thi mẫu). Như trên hình 4a), ống trụ thực hiện chuyển động song phẳng được phân tích bằng cách chọn B làm điểm cực, gồm: chuyển động tịnh tiến của điểm B và chuyển động quay quanh trục đi qua B của ống trụ. Còn trong bài này, hình 4b), chuyển động của con lăn gồm: chuyển động tịnh tiến của điểm A và chuyển động quay quanh A của con lăn. Các bạn nên đọc lại lời giải trong hai trường hợp để so sánh.

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Đình Áng, Trịnh Anh Ngọc, Ngô Thành Phong, *Nhập môn Cơ học*, NXB Đại học Quốc gia TP. HCM 2003.

[2] Nguyễn Trọng Chuyền, Phan Văn Cúc, *Bài tập cơ học lý thuyết*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội, 1991.

[3] R. Douglas Gregory, *Classical Mechanics - An Undergraduate Text*, Cambridge University Press, 2006.

[4] R. Douglas Gregory, *Classical Mechanics - Solution Manual*, Cambridge University Press, 2006.

[5] X.M. Targ, *Giáo trình giản yếu cơ học lý thuyết*, NXB Đại học & Trung học Chuyên nghiệp Hà nội, Mir Matxcơva 1979.